

Плоские движения твердой системы.

1. Общие соображения. Теорема Эйлера о мгновенном центре вращения.

1. Возвратимся теперь к изучению движений твердой системы, происходящих параллельно некоторой определенной плоскости; эту последнюю мы всегда будем считать неразрывно связанной с системой отсчета, которую будем условно называть *неподвижной* (III, рубр. 27 и IV, рубр. 13). Мы уже показали в своем месте, что этого рода движение всегда реализуется таким образом, что некоторая плоскость p , принадлежащая движущейся системе S , движется, оставаясь в неподвижной плоскости π .

Если P есть точка системы S , расположенная вне плоскости π , то мы рассмотрим ее ортогональную проекцию P_1 на плоскость π . Вследствие твердости системы вектор $\overline{P_1P}$ будет оставаться перпендикулярным к плоскости π (и к совпадающей с нею плоскости p) и будет сохранять неизменной свою длину; поэтому точка P будет оставаться в плоскости, параллельной π , она будет описывать в ней траекторию, конгруэнтную и параллельную той, которую описывает точка P_1 , и притом по этому же путевому уравнению. Таким образом, всякая плоскость, параллельная p (и неизменно связанная с системой S), движется, оставаясь в себе самой. В этих параллельных плоскостях движение имеет все время те же кинематические свойства и соотношения. Мы можем поэтому ограничиться изучением движения одной плоскости в самой себе, т. е. изучением *плоского твердого движения*.

Ввиду того интереса, который этого рода движения представляют по своим приложениям, мы здесь не ограничимся выводом их свойств из общих законов движения твердых тел (гл. III и IV); мы присоединим еще некоторые элементарные соображения, которые дают возможность установить теорию плоских движений непосредственным и независимым путем.

2. В рубр. 24 гл. III было показано, что всякое твердое движение, происходящее параллельно неподвижной плоскости π , в каждый момент представляет собою либо вращательное движение (вокруг оси, перпендикулярной к постоянной плос-

кости π) либо поступательное (в направлении, параллельном этой плоскости). Отсюда следует, что всякое движение плоскости в самой себе есть либо чисто вращательное движение (вокруг некоторой точки этой плоскости) либо поступательное (в самой плоскости).

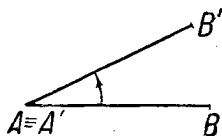
Этот важный результат мы вновь докажем непосредственно элементарным путем. С этой целью сравним положения, занимаемые плоскостью p в два последовательных момента t и $t + dt$. Из первого положения во второе плоскость p перешла некоторым определенным непрерывным движением. Но если отвлечься от кинематических обстоятельств движения, относящихся к моментам времени, заключенным между t и $t + dt$, то плоскость p всегда можно перевести из первого положения во второе вращением, или, в частном случае, поступательным перемещением (прямолинейным); это приводит к следующей теореме Эйлера: *всякое смещение твердой плоскости в самой себе может быть выполнено некоторым вращением или, в частном случае, некоторым прямолинейным поступательным перемещением.*

Это, впрочем, факт чисто геометрический, так как закон этого перемещения в его зависимости от времени остается совершенно неопределенным.

Чтобы доказать формулированное предложение, нужно, прежде всего, геометрически определить одно из двух положений плоскости p относительно другого. Если A и B суть положения, которые первоначально занимали на плоскости π определенные две точки движущейся плоскости p , то достаточно знать положения A' и B' тех же точек в конечный момент, и положение всей плоскости в этот момент будет вполне определено; при этом, конечно, вследствие твердости плоскости p $A'B' = AB$. В самом деле, если C есть положение, которое в начальный момент занимала произвольная третья точка плоскости p , то в конечный момент она займет такое положение C , что фигура ABC (треугольная или прямолинейная) будет конгруэнтна с $A'B'C'$; а такая точка существует только одна (конечно, в предположении, что ABC совмещается с $A'B'C'$ движением плоскости в себе). Это обнаруживает, что перемещение точек A и B в A' и B' приводит к перемещению всей плоскости в ее конечное положение.

Если, в частном случае, точка A' совпадает с A (фиг. 50), то достаточно произвести вращение плоскости p вокруг точки $A \equiv A'$, и точка B по окружности радиуса AB перейдет в B' после поворота на угол $\widehat{BAB'}$.

Исключая этот случай, т. е. предполагая точку A' отличной от A , выберем в плоскости p в качестве второй точки B ту, которая в начальный момент как раз совпадает с точкой A' . Ее конечное положение B' вследствие условия $A'B' = AB$ будет

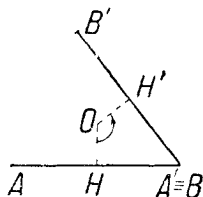


Фиг. 50.

лежать на окружности с центром $A' \equiv B$ и радиуса BA . При этом непременно будет иметь место один из следующих трех случаев, которые мы разберем в отдельности.

а) Точка B' не лежит на прямой AA' (фиг. 51).

В этом случае точка пересечения O осей отрезков AA' и BB' (т. е. перпендикуляров к ним из их середин H и H') представляет собой центр, вращением вокруг которого на угол $\widehat{HON'}$ можно совместить точки A и B с точками A' и B' .



Фиг. 51.

б) Точка B' расположена на прямой AB и притом совпадает с A (фиг. 52).

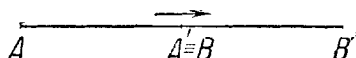
В этом случае для нашей цели достаточно повернуть плоскость p на 180° вокруг середины отрезка AA' (совпадающего с BB').

с) Если, наконец, точка B' лежит на продолжении отрезка AA' (фиг. 53), т. е. симметрично с A относительно $A' \equiv B$, то пара точек A, B совмещается с A', B' при поступательном перемещении плоскости p , выражаемом ориентированным отрезком AA' .

Установив таким образом теорему Эйлера, заметим, что самое ее доказательство приводит к следующему факту: если смещение осуществляется при помощи вращения, то через центр этого вращения проходят оси всех отрезков, соединяющих начальное положение A какой-либо точки плоскости p с конечным ее положением.



Фиг. 52.



Фиг. 53.

Заметим, наконец, что случай „с“ поступательного перемещения мы можем рассматривать как предельный случай вращения, представляя себе центр последнего удаленным в бесконечность (в направлении, перпендикулярном к перенесению).

3. После всего изложенного возвратимся к движению твердой плоскости p по себе самой; в промежутке времени от t до $t + dt$, рассмотрим одновременно как действительно происшедшее движение, так и фиктивное вращательное или поступательное движение (предполагая его, например, равномерным), которое осуществляет то же конечное смещение. Если, сохраняя момент t , мы будем неограниченно уменьшать Δt , то фиктивное движение будет от момента к моменту изменяться; в пределе оно будет стремиться к некоторому бесконечно малому движению, вращательному или поступательному, которое производит то же бесконечно малое перемещение dA любой точки A , что и действительное движение за элемент времени от t до $t + dt$, а потому совпадает с ним. Таким образом доказано, что всякое состояние плоского твердого движения является в каждый момент вращательным, или в частном случае, поступательным.

4. Во всякий момент, в который плоское движение является вращательным, центр I элементарного вращения (предельное положение центра O фиктивного конечного вращения) называется *мгновенным центром* или *полосом* движения в рассматриваемый момент; этот центр представляет собою аналог мгновенной оси твердого движения в пространстве (III, рубр. 21). Если же движение поступательное, то центр можно себе представлять в бесконечности (в направлении, перпендикулярном к бесконечно малому поступательному смещению).

Так как в любом интервале Δt центр фиктивного вращательного движения представляет собою общую точку осей всех смещений AA' отдельных точек, то, переходя к пределу, получаем теорему Шаля ¹⁾. *При плоском твердом движении, в каждый его момент, нормали, проведенные в отдельных точках движущейся плоскости к соответствующим траекториям, проходят через общую точку — мгновенный центр движения; в частности, если движение в некоторый момент является поступательным, то все эти нормали параллельны между собой.*

Вместе с тем на основании предложения рубр. 6 гл. III в первом случае скорость каждой точки A движущейся плоскости перпендикулярна к прямой AI , соединяющей эту точку с мгновенным центром; скалярное значение скорости пропорционально расстоянию точки от центра I .

Таким образом, в частности, каково бы ни было состояние плоского вращательного движения, мгновенный центр характеризуется тем, что он представляет собою единственную точку движущейся плоскости, скорость которой равна нулю; между тем, как мы хорошо знаем, при любом поступательном движении все точки плоскости имеют эквивалентные, или просто равные скорости.

2. Полярные траектории.

5. Рулетта и ее базы. Если твердое движение плоскости p по неподвижной плоскости π в течение некоторого промежутка времени остается поступательным (т. е. мгновенный центр вращения в этот промежуток все время остается в бесконечности), то ход его имеет характер, присущий всякому поступательному движению, как это изложено в рубр. 3 и 4 гл. III.

В иные промежутки времени мгновенный центр может оказаться в бесконечности только в отдельные моменты; вследствие этого весь промежуток движения может быть разбит на интервалы, в каждом из которых движение остается либо все время поступательным (кроме пограничных моментов), либо вращательным.

В течение промежутка последнего типа подвижная плоскость отмечает в каждый момент на плоскости π определенный центр

¹⁾ Михаил Шаль (Michele Chasles) родился в Эперноне (провинция Eure et Loir) в 1793 г., умер там же в 1880 г., был профессором геометрии в Парижском университете, разрабатывал также вопросы истории математики.

вращения или *полюс* I , с которым совпадает некоторая точка C движущейся плоскости p . С течением времени полюс меняет свое положение как на неподвижной плоскости π , так и на подвижной p . Таким образом получаются две кривые: одна λ , которую точка I описывает на неподвижной плоскости, другая l , которую описывает точка C на подвижной плоскости. Эти две кривые, соответствующие здесь аксоидам произвольного твердого движения (§ 6, IV), называются *взаимно полярными траекториями*. В частности, кривая l , описанная на подвижной плоскости, называется *рулеттой*, а соответствующая кривая λ на неподвижной плоскости — *ее базой*.

6. Важность изучения этих двух траекторий коренится в следующем предложении: *в течение движения рулетка катится без скольжения по своей базе*. Эта теорема, которая в плоскости аналогична предложению, установленному в предыдущей главе для пространства, доказывается совершенно такими же соображениями, именно при помощи фиктивного относительного движения. Однако мы здесь вкратце повторим это рассуждение, чтобы развить учение о плоском движении совершенно независимо от общей теории движения твердых тел.

Рулетка и ее база имеют в каждый момент общую точку, с которой в этот момент совпадают подвижный полюс C и неподвижный I . Рассмотрим движение точки C по подвижной плоскости p , траекторией которого является рулетка l . Поскольку рулетка связана с подвижной плоскостью p , она увлекается переносным ее движением по неподвижной плоскости π ; таким образом, движение точки C по неподвижной плоскости π мы можем рассматривать как абсолютное движение; оно определяется данным движением плоскости p как переносным движением, и движением точки C по рулетке как относительным. В каждый момент, как уже сказано, точка C совпадает с некоторой точкой на неподвижной плоскости; таким образом, база рулетки представляет собой не что иное, как траекторию абсолютного движения точки C . Если вообразим себе материальную точку, совпадающую в каждый момент с точкой I , то таковая совершает относительное движение по рулетке l , а абсолютное по ее базе λ . Вместе с тем по принципу относительного движения (рубр. 2 предыдущей главы) имеет место соотношение:

$$v_c = v_r, \quad (1)$$

так как переносная скорость, т. е. скорость точки C относительно плоскости π равна нулю, так как C является мгновенным центром (рубр. 4).

Соотношение (1) непосредственно обнаруживает, что обе полярные траектории в каждый момент имеют в общей точке I ту же касательную. Более того, поскольку это тождество устанавливает, что элементарные смещения точки I по обеим траекториям совпадают, то каждая траектория катится по другой без скольжения.

Таким образом установлено, что каждое непоступательное движение может быть осуществлено качением кривой, неразрывно связанной с неподвижной плоскостью (рулетты) по неподвижной кривой (ее базе).

Заметим, что взаимное с этим движение [т. е. движение плоскости π относительно плоскости p (рубр. 8 предыдущей главы)] имеет те же полярные траектории.

3. Сопряженные профили.

7. Понятие о полярных траекториях допускает обобщение, которое, как увидим, имеет значительный интерес с прикладной точки зрения. Положим, что некоторая твердая фигура F движется по плоскости, а s есть некоторая (плоская) кривая, неразрывно с этой фигурой связанная. Последовательные положения, которые кривая s занимает в своем переносном движении совместно с фигурой F , будут, вообще говоря, иметь некоторую огибающую γ . Всякий раз как такая огибающая действительно существует, ее называют *сопряженным профилем* кривой s .

По основному свойству огибающей кривая s в каждый момент касается ее в точке M , которая от момента к моменту может менять свое положение. Отсюда, прежде всего, ясно, что соотношение между кривыми s и γ является взаимным. В самом деле, если рассмотрим взаимное движение, т. е. движение кривой γ относительно фигуры F , то на кривую s можно смотреть, как на огибающую различных положений кривой γ , поскольку s в каждый момент соприкасается с соответствующим положением последней. Этим оправдывается и название сопряженных профилей без указания того, который профиль является подвижным и который представляет огибающую.

8. Во всяком случае *общая нормаль к кривым s и γ в точке их соприкосновения M в каждый момент проходит через соответствующий мгновенный центр вращения* (будь он собственный или несобственный).

Если точка M совпадает с I , то дело ясно. В общем случае, когда точка M отлична от I , мы прибегнем к обычным соображениям, опирающимся на свойства относительного движения. Именно, за относительное движение мы будем считать движение точки M по кривой s , а переносным будет служить движение фигуры F по отношению к неподвижной плоскости, т. е. движение кривой s относительно γ ; при этих условиях абсолютным движением будет движение точки M по отношению к неподвижной плоскости, которое совершается по кривой γ . Таким образом v_r (относительная скорость точки M) есть скорость движения точки M по траектории s , v_a (абсолютная скорость той же точки) есть скорость точки M по траектории γ . Так как кривые s и γ в точке M соприкасаются, то обе скорости направлены по общей их касательной; но в таком случае по той же прямой направлена их разность $v_a - v_r$, т. е. переносная ско-

рость точки M . С другой стороны, поскольку переносное движение представляет собою в этот момент вращение вокруг точки I (рубр. 4), его скорость перпендикулярна к радиус-вектору IM , который, таким образом, имеет направление общей нормали обоих профилей. В предельном случае поступательного движения (когда точка I находится на бесконечности) переносная скорость, а с нею и касательные к профилям имеют направление переноса.

9. В качестве частного случая установленного сейчас предложения мы вновь приходим к теореме Шаля. Для этого достаточно предположить, что профиль s сводится к одной точке P или, если угодно (чтобы сделать выделяемый частный случай более наглядным) к бесконечно малой окружности вокруг точки P . Огибающая γ в этом случае, очевидно, совпадает с траекторией точки P на плоскости γ ; точка соприкосновения M кривых s и γ в каждый момент совпадает с положением точки P , а следовательно, общая нормаль к профилям совпадает с нормалью к траектории.

10. Другое замечательное следствие получим, если предположим, что движение фигуры F происходит таким образом, что профиль s постоянно проходит через неподвижную точку Ω . В этом случае сопряженный профиль γ сводится к одной только точке Ω ; вывод, который отсюда пристекает, заключается в следующем: *если профиль s , неразрывно связанный с фигурой F , проходит через неподвижную точку Ω , то нормаль к s в точке Ω (вообще меняющаяся от момента к моменту) содержит мгновенный центр вращения (относительного движения фигуры F , а следовательно, и кривой s).* К этому мы также придем непосредственно от теоремы Шаля, если рассмотрим взаимное движение.

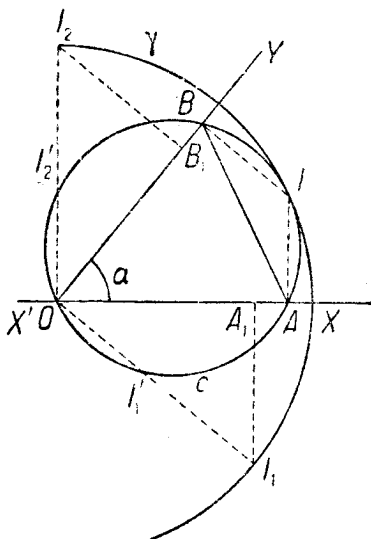
4. Примеры плоских твердых движений.

11. Прежде чем обратиться к дальнейшим выводам общего характера, рассмотрим несколько примеров разыскания полярных траекторий заданных плоских движений. К этого рода задачам мы приходим всякий раз, когда хотим механическим приспособлением осуществить то или иное заданное плоское твердое движение. Как мы видели, это всегда возможно выполнить (помимо чисто практических трудностей, на которых мы ниже также остановимся) качением одной из двух полярных траекторий по другой. В прикладной механике особый интерес имеют так называемые *эпициклические движения*, соответствующие тому случаю, когда обе траектории представляют собою окружность. Этими движениями мы займемся обстоятельно в § 8. Здесь же рассмотрим несколько примеров, в которых будем предполагать известной только последовательность положений движущейся фигуры, а не закон, которому движение следует во времени. Таким образом, по существу, речь будет идти о вопросах геометрии движения; если мы при этом будем иногда вводить

время t и кинематические понятия, то будем это делать только для удобства аргументации и словесного изложения.

12. Прямолинейный стержень, скользящий по прямолинейным направляющим. Представим себе прямолинейный стержень, схематически изображаемый прямолинейным отрезком AB , концы которого скользят по сторонам неподвижного угла $XOY = \alpha < \pi$ (фиг. 54).

Траекториями точек A и B , по предположению, служат полу-прямые OX и OY ; если поэтому AB есть произвольное положение стержня, то соответствующим полюсом I будет служить точка пересечения перпендикуляров, восстановленных из A и B к сторонам угла. Если рассматривать эти перпендикуляры как неограниченные прямые, то они образуют в точке I четыре угла, из которых два равны α , а два другие дополняют α до π . В положении, изображенном на рисунке, отрезки AI , BI образуют угол $AIB = \pi - \alpha$; четырехугольник $O A I B$ имеет два прямых угла при противоположных вершинах и, следовательно, вписывается в круг. Вследствие этого отрезок в этом своем положении виден из противоположного полюса под постоянным углом $\beta = \pi - \alpha$. Отсюда следует, что соответствующая ветвь рулетты (геометрическое место полюсов на плоскости, неразрывно связанной с AB) есть дуга окружности, идущая от точки A к точке B и имеющая угол β .



Фиг. 54.

Поскольку четырехугольник может быть вписан в окружность, то последняя (c) при любом положении стержня AB проходит через постоянную точку O . Вследствие же перпендикулярности хорд OA и AI (равно как OB и BI), точки O и I при любом положении отрезка AB расположены на окружности с диаметрально противоположно друг другу. Отсюда следует, что точка I все время остается от O на расстоянии, равном диаметру окружности c . Это значит: база рулетты есть дуга окружности γ , имеющей центр в точке O , и радиус, равный диаметру окружности c .

Легко видеть, как изменяются эти выводы, когда стержень AB переносится так, что угол при вершине A или B треугольника OAB становится прямым, а затем тупым. Отрезок AB виден тогда из I под углом α ; но геометрическое место точки на плоскости, неразрывно связанной с отрезком AB , т. е. соответствующая ветвь рулетты, все-таки принадлежит окружности c .

С другой стороны, для наблюдателя, остающегося неподвижным, крайние положения стержня AB получатся тогда, когда он расположится либо вдоль оси OX , либо вдоль OY ; в первом случае точка B находится в O , а A в A_1 , во втором случае точка A находится в O , а B в B_1 .

Полюс I_1 или I_2 , соответствующий первому или второму из этих положений, лежит на окружности в конце радиуса OI_1 или OI_2 , соответственно перпендикулярного к OY или OX , и притом с той же стороны прямой OX или соответственно OY ; таким образом базой твердого движения служит как раз дуга $\widehat{I_1 I_2}$ окружности γ , которой соответствует при центре угол $\pi - \alpha$, т. е. β .

Пусть I'_1 и I'_2 будут точки, в которых прямые OI_1 и OI_2 вторично пересекают окружность c . Дуга $\widehat{I'_1 I'_2}$ окружности c по длине равна дуге $\widehat{I'_1 I'_2}$ окружности γ , имеющей вдвое больший радиус, так как углы $\widehat{IOI'_1}$ и $\widehat{IOI'_2}$, из которых один имеет вершину на окружности, а другой в центре ее, равны между собой. Отсюда следует, что дуга $\widehat{I'_1 I'_2}$ окружности c катится по дуге $\widehat{I_1 I_2}$ окружности γ . Совершенно также дуга $\widehat{I'_2 I'_1}$ катится по $\widehat{I_2 I_1}$.

Можно еще заметить, что треугольник $OA_1 I_1$ имеет прямой угол при вершине A_1 , — угол $\widehat{AOI_1}$ по абсолютной величине равен $\pi/2 - \alpha$; вследствие этого радиус OI_2 окружности γ , а следовательно, и диаметр окружности c выражаются формулой:

$$\frac{AB}{\sin \alpha} \quad (2)$$

Теперь проведем полупрямую OX' , противоположную OX и представим себе, что стержень AB , продолжая свое движение по другую сторону рассмотренного уже положения OB_1 , скользит своим концом A по OX' , а концом B попережнему по OY .

Мы можем повторить предыдущее рассуждение, и в этой второй фазе движения базой и рулеткой будут служить дуги окружности; так как $\widehat{Y O X'} = \pi - \alpha$, радиус новой базы (или диаметр новой рулетки) будет равен:

$$\frac{AB}{\sin (\pi - \alpha)},$$

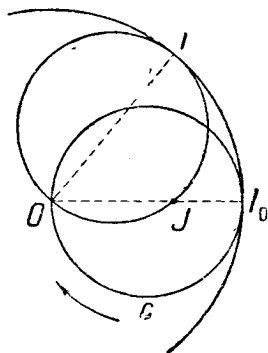
а потому не будет отличаться от радиуса прежней базы; таким образом полярными траекториями в этой фазе движения являются дуги тех же окружностей γ и c . Ясно также, что базой в этой второй фазе служит дуга окружности γ , меньшая полуокружности и расположенная между I_2 и точкой I_3 , диаметрально противоположной I_1 .

Если возьмем, далее, продолжение OY' оси OY и проследим за движением стержня AB внутри углов $X'OY'$ и $Y'OX$, то придем к заключению, что все движение (с геометрической точки зрения, очевидно, периодическое) имеет полярными траекториями две окружности ϵ и γ ; рулетка ϵ все время катится по базе γ , имеющей вдвое больший радиус. Это — движение *эпициклическое*.

13. Обратно, каждое плоское твердое движение, которое сводится к тому, что окружность ϵ катится по внутренней стороне окружности γ вдвое большего радиуса, может быть многообразно осуществлено скольжением хорды подвижной окружности по двум прямым, проходящим через центр неподвижной окружности.

Предыдущая теорема будет доказана, если мы обнаружим, что при указанных условиях каждая точка подвижной окружности ϵ описывает в рассматриваемом движении диаметр неподвижной окружности γ (теорема Кардана)¹⁾.

С этой целью зафиксируем на окружности ϵ какую угодно точку и рассмотрим ее движение, начиная с момента, когда она находится на окружности γ , например в точке I_0 мгновенного соприкосновения обеих окружностей (фиг. 55). Покажем, что в другом положении окружности ϵ , в котором точкой ее соприкосновения с γ служит, скажем, I , зафиксированная на ϵ точка будет находиться в пересечении J окружности ϵ с радиусом OI_0 окружности γ . Иначе говоря, поскольку движение, по предположению, происходит без скольжения, дуга $\widehat{JI}$ окружности ϵ имеет такую же длину, как и дуга $\widehat{I_0I}$ окружности γ . Действительно, легко заметить, что угол $\widehat{I_0OI}$ как угол при центре окружности γ опирается на ее дугу $\widehat{I_0I}$, а как угол вписанный в окружность ϵ , опирается на дугу $\widehat{JI}$; следовательно, угол при центре последней дуги вдвое больше $\widehat{I_0OI}$, т. е. угла при центре окружности γ , соответствующего дуге $\widehat{I_0I}$. Так как, по условию, радиус дуги $\widehat{JI}$ представляет половину радиуса дуги $\widehat{I_0I}$, то мы отсюда непосредственно заключаем, что обе дуги имеют одинаковую длину. Из предыдущего доказательства следует, что за опорные прямые можно выбрать произвольные



Фиг. 55.

¹⁾ Джироламо Кардано (Girolamo Cardano) родился в Павии в 1501 г., умер в Риме в 1576 г., преподавал математику в Милане, а затем медицину в Павии и в Риме.

две прямые, проходящие через центр O ; в частности, можно взять две взаимно перпендикулярные прямые; в этом последнем случае хордой рулетты, концы которой по ней скользят, служит ее диаметр.

14. Теорема Кардана может быть доказана быстрее, если прибегнем к рассуждению кинематического характера. Траектория произвольной точки A окружности c должна быть такова, чтобы нормаль к ней в точке A в каждый момент проходила через мгновенный центр I (рубр. 4); касательная поэтому necessarily должна проходить через диаметрально противоположную точку окружности, т. е. через неподвижную точку O ; но линия, все касательные которой сходятся в одной точке O , не может быть не чем иным, как прямой, проходящей через точку O . Если это нуждается в доказательстве, то таковое может быть выполнено таким же рассуждением, как и в рубр. 50 гл. II; именно, радиус-вектор $\rho = OA$ и версор u касательной связаны соотношением

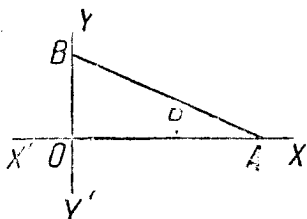
$$OA = \rho u;$$

дифференцируя его, получаем:

$$\dot{OA} = \dot{A} = \dot{\rho} u + \rho \dot{u}.$$

Однако, по условию, производная $\dot{A}$ есть вектор, имеющий направление версора u , а вектор u либо перпендикулярен к u , либо равен нулю; поэтому, умножая обе части скалярно на $\dot{u}$, получаем $\rho u^2 = 0$, а следовательно, и $u = 0$, как это и требовалось доказать.

15. Эллисограф. Движением, исследованным в предыдущих рубриках, можно воспользоваться для построения прибора, служащего для непрерывного черчения эллипса. Конструкция этого прибора основана на том, что при этого рода движении траектория точки, не принадлежащей рулетке, есть эллипс.



Фиг. 56.

Чтобы это доказать, нам достаточно рассмотреть тот случай (фактически применяемый в эллисографах), когда обе опорные прямые взаимно перпендикулярны и, следовательно, скользящий по ним отрезок представляет собой диаметр рулетты. Выбрав опорные прямые за оси координат и взяв на отрезке AB или на одном из его продолжений произвольную точку P (фиг. 56), полагаем $AP = b$, $PB = a$ (считая при этом, например, отрезок AB ориентированным от A к B). Если через θ обозначим угол двух ориентированных прямых AB и OX , то

$$x = -a \cos \theta, \quad y = b \sin \theta;$$

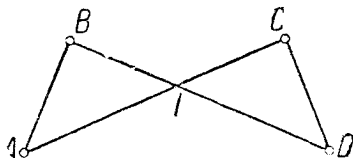
исключая отсюда θ , мы получим:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Вследствие этого чертящая точка, закрепленная на стержне AB или на одном из его продолжений, будет при движении стержня описывать на плоскости эллипс.

16. Движение, взаимное с тем, которое изучено в предыдущих рубриках, реализуется при помощи твердого угла (в частности наугольника), который движется в плоскости таким образом, что стороны его постоянно проходят через две неподвижные точки A и B . Тогда рулеткой служит окружность, которая катится по окружности половинного радиуса, остающейся внутри ее.

17. Сочлененный антипараллелограмм. Под антипараллелограммом разумеют четырехугольник $ABCD$ с пересекающимися сторонами AC и BD (фиг. 57), в котором противоположные стороны равны ($AB=CD$ и $AC=BD$). Такой параллелограмм мы будем представлять себе сочлененным, т. е. составленным из твердых стержней, скрепленных в вершинах шарнирами.



Фиг. 57.

Если мы закрепим два шарнира, например A и B (концы стороны, которая не пересекается противоположной стороной CD), и будем вращать подвижные стержни (в их плоскости), то антипараллелограмм будет деформироваться, сохраняя, однако, неизменной длину каждой стороны.

Будем, в частности, рассматривать отрезок CD как движущуюся фигуру. Траекториями точек C и D служат окружности, имеющие центры в A и B ; следовательно (рубр. 4), мгновенным центром I служит точка пересечения прямых AC и BD .

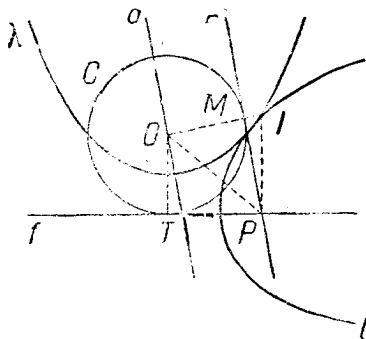
С другой стороны, треугольники IAB и IDC равны, так как, по самому определению антипараллелограмма, равны стороны AB и CD , углы при общей вершине I , а также углы при вершинах B и C (ср. треугольники ABD и ACD). Отсюда следует, что $IA=ID$ и $IB=IC$, а потому

$$IA + IB = IC + ID,$$

так как эти две суммы имеют постоянную длину (т. е. не зависящую от положения отрезка CD), равную общей длине стержней AC и BD . Отсюда мы можем заключить: полярные траектории λ и l суть равные эллипсы, имеющие фокусы в неподвижных вершинах A и B и в подвижных вершинах C и D .

Если мы закрепим такие вершины, как A и C (концы стороны, которая внутренне пересекается с противоположной стороной BD), то при помощи совершенно аналогичного рассуждения убедимся, что полярными траекториями служат ветви гиперболы, также равные между собой.

18. Дана окружность c и неподвижная прямая f , касающаяся окружности в точке T (фиг. 58). Прямолинейный профиль r движется, огибая окружность c таким образом, что некоторая его точка P скользит по прямой. Обозначим через M точку касания окружности c и прямой r . Мы можем немедленно разыскать мгновенный центр I , как точку пересечения перпендикуляра к прямой в точке P (рубр. 4) с радиусом OM . Если проведем прямую OP ,



Фиг. 58.

то она разделит угол $\widehat{TPM}$ пополам, и ясно, что треугольник OIP имеет при вершинах O и P равные углы. В самом деле, угол при вершине I представляет собою дополнение угла

$\widehat{OPT}$ до прямого, а угол при вершине O (принадлежащий также прямоугольному треугольнику OMP) дополняет до прямого угол $\widehat{OPM}$, ко-

торый равен $\widehat{OPT}$. Отсюда следует, что точка I одинаково удалена от точки O и от P или, если угодно,

от неподвижной точки O и неподвижной прямой f . Это свойство точки (независимо от частного положения подвижного профиля) характеризует описываемое ею геометрическое место (т. е. базу), как параболу, имеющую фокусом точку O и директрисой прямую f .

С такой же легкостью мы обнаружим, что рулетта l также представляет собой параболу, равную своей базе, но имеющую фокусом точку P , директрисой прямую d , проходящую через центр O , параллельно r ; это вытекает из того, что точка I равноудалена от точек P и O или, что то же, от точки P и прямой d .

5. Эпициклические методы черчения сопряженных профилей.

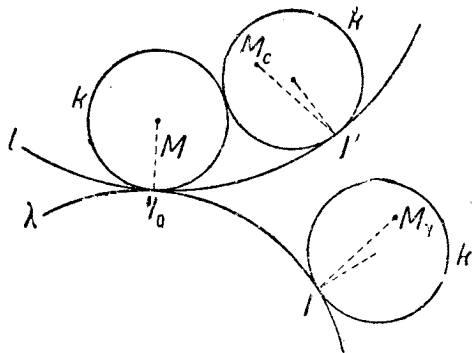
19. Определение сопряженных профилей (рубр. 7) может быть непосредственно использовано для их действительного вычерчивания; из него можно вывести практические правила нанесения точек одного из двух профилей, когда дан другой и известны полярные траектории l и λ . Мы, однако, не будем здесь на этом останавливаться, но вместо этого укажем симметрический прием, который по данным траекториям l и λ воспроизводит, так сказать, автоматически пары сопряженных профилей.

Этот прием называется *эпициклическим*, потому что он специально употребляется в том случае, когда обе траектории l и λ суть окружности (рубр. 11).

Положим, что на плоскости зафиксирована произвольная кри-

вая k , которая при данном положении полярных траекторий касается обеих в точке их соприкосновения I_0 (мгновенный центр вращения). Исходя из этого положения, будем катать k , как твердую кривую один раз по рулетке l , другой раз по базе λ .

Произвольная точка M , неразрывно связанная с k , описывает при первом качении дугу кривой s , при втором — дугу сопряженной кривой γ ; при этом друг другу соответствуют те точки M_s и M_γ , которые представляют положения точки M на подвижной фигуре и в плоскости движения, после того как кривая k прокатится по l и по λ на одинаковое расстояние, считая с положения I_0 . Доказательство, можно сказать, непосредственно напрашивается.



Фиг. 59.

В самом деле, пусть I и I' (фиг. 59) будут точки соприкосновения кривой k соответственно с λ и l в этих двух ее положениях (на фигуре и на неподвижной плоскости). По теореме Шаля (рубр. 4) прямые $I'M_s$ и IM_γ нормальны к траекториям точки M , т. е. к кривым s и γ . С другой стороны, когда кривая l находится в соприкосновении с λ в точке I , вследствие равенства дуг $\widehat{I_0I'}$ и $\widehat{I_0I}$ точка I' necessarily должна попасть в I . Вместе с тем, кривая k , соприкасаясь в точке I' с l , непременно приходит в совмещение с конгруэнтной кривой k , касающейся λ в точке I . Вследствие этого, в частности, совпадают точки M_s и M_γ , а вместе с тем и нормали $I'M_s$ и IM_γ . Таким образом кривые s и γ постоянно имеют в общей точке общую нормаль, а потому и общую касательную. Этим свойством характеризуются два сопряженных профиля.

20. Рассмотрение сопряженных профилей имеет особенно важное значение с точки зрения приложений. В самом деле, когда нужно осуществить данное плоское движение, то способ образования его, который теоретически представляется наиболее простым (при помощи полярных траекторий), далеко не всегда соответствует практическим требованиям. Часто существует специальный профиль с подвижной фигуры, который целесообразнее всего поддерживать в соприкосновении с неподвижным профилем γ . Мы имеем, таким образом, дело с двумя сопряженными профилями. Однако, чтобы вполне определить геометрический ход движения, в этом случае недостаточно, как при полярных траекториях, указать два профиля. Чтобы выяснить этот суще-

ственный пункт, припомним, что мгновенное движение кривой c всегда представляет собой вращение вокруг полюса I ; однако этот полюс вообще не совпадает с точкой соприкосновения M . Вследствие этого соприкосновение не происходит, так сказать, равными шагами, т. е. точка соприкосновения не описывает равных дуг на кривых c и γ , как это имеет место при чистом качении; здесь происходит некоторое дополнительное смещение $d\sigma$ профиля c по γ , которое называется *скольжением одного профиля по другому*.

Как мы видели в рубр. 8, относя смещение к элементу времени dt , будем иметь:

$$dc = v_c dt, d\gamma = v_\gamma dt \text{ и } d\sigma = v_\sigma dt,$$

где dc есть смещение точки M по кривой c , $d\gamma$ — смещение той же точки по кривой γ , а v_σ — скорость переноса.

Векторное соотношение $v_a = v_r + v_\tau$ дает:

$$d\gamma = dc \pm d\sigma,$$

причем тот или другой знак нужно взять в зависимости от того, в какую сторону обращено скольжение. Как видим, когда заданы профили c и γ , нужно, прежде всего, определить смещение профиля c , которое производится качением его по γ ; но этого недостаточно, чтобы установить последовательные положения кривой c ; нужно еще определить, в каком размере и в какую сторону происходит скольжение точки соприкосновения.

Можно еще отметить, что при надлежащих соглашениях относительно сторон обращения и знаков приведенному выше дифференциальному соотношению можно придать общую форму для любого соприкосновения профилей в точке M и при любом относительном положении мгновенного центра.

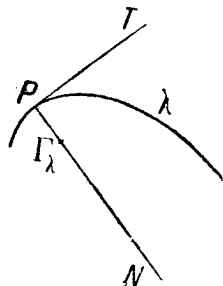
21. В заключение приведем еще соображение механического характера относительно материального осуществления плоского движения при помощи двух сопряженных профилей c и γ .

Помимо большей теоретической простоты осуществление движения при помощи полярных траекторий имеет еще то преимущество, что этим путем устраняется пассивное влияние, обусловливаемое *трением скольжения*, которое играет тем большую роль (т. е. требует тем большей работы для преодоления сопротивления), чем значительнее скольжение профилей. Между тем, когда эти кривые совпадают с полярными траекториями, то имеет место только трение качения, действие которого гораздо слабее (гл. XIII). С другой стороны, скольжение $d\sigma$ пропорционально расстоянию точки соприкосновения от полюса (рубр. 4); если поэтому те или иные практические соображения заставляют отказаться от того, чтобы кривые c и γ совпадали с полярными траекториями, то во всяком случае нужно стараться выбрать их в возможно меньшем удалении от последних.

6. Движение полюса по полярным траекториям.

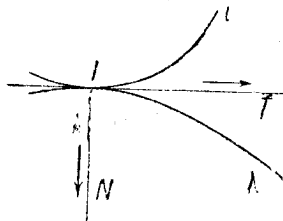
22. Возвращаясь к соображениям общего характера, мы займемся здесь изучением закона, по которому в плоском твердом движении полюс движется по базе и по рулетте.

Для этой цели будет полезно рассмотреть, прежде всего, специальную категорию плоских твердых движений. Пусть будет дана плоская кривая λ (фиг. 60); рассмотрим плоское твердое движение, которое определяется прямым углом $\widehat{TPN}$, реализуемым при помощи наугольника; вершина этого угла P движется по кривой λ по какому угодно временному закону, а сторона PT все время направлена по касательной к кривой; таким образом прямая PN всегда будет нормальна к кривой. Так как λ есть траектория точки P , принадлежащей к подвижной системе, то полюс в каждый момент лежит на прямой PN (рубр. 4). Более того, так как он представляет собой предельное положение пересечения прямой PN с бесконечно близкой нормалью, то он совпадает с центром кривизны Γ_λ кривой λ в точке P . Таким образом мы заключаем, что в рассматриваемом движении рулеттой служит нормаль PN , а базой — эволюта кривой λ (т. е. геометрическое место ее центров кривизны).



Фиг. 60.

Обратно, если будем рассматривать взаимное движение, т. е. такое, которое совершает неизменяемая плоская кривая λ , двигающаяся в своей плоскости таким образом, что она постоянно проходит через неподвижную точку P и касается в этой точке неподвижной прямой PT , то рулеттой будет служить эволюта кривой λ , а базой перпендикуляр PN к неподвижной прямой в точке P .



Фиг. 61.

23. Установив все это, вернемся к произвольному плоскому движению; рассмотрим движение прямого угла, составленного касательной IT и нормалью IN к базе λ в мгновенном полюсе (фиг. 61); при этом надо установить соглашение относительно стороны обращения каждой из этих двух прямых.

Это вспомогательное движение прямого угла $\widehat{ITN}$ можно рассматривать с двух точек зрения: а) непосредственно и б) как образованное данным твердым движением кривой l по λ в качестве переносного движения и скольжением касательной IT вдоль l в качестве относительного движения.

С точки зрения а) вспомогательное движение, вследствие соображений предыдущей рубрики, имеет полюсом центр кривизны Γ_λ кривой λ и определенную угловую скорость; если

обозначим через u единичный вектор, перпендикулярный к двум ориентированным прямым IT и IN и обращенный относительно них в правую сторону, то угловую скорость можно будет представить в виде $\omega_\lambda u$, где ω_λ есть скаляр определенного знака. С точки зрения б) вспомогательное движение можно считать составленным из двух движений: именно 1) из данного твердого движения, с мгновенным полюсом в точке I и некоторой угловой скоростью относительно неподвижной плоскости π (эту угловую скорость поэтому можно представить в виде $\omega_I u$) и 2) из движения прямой IT по кривой l , для которого мгновенным центром служит центр кривизны C_l кривой l , а угловая скорость вновь имеет вид $\omega_l u$.

Отсюда мы заключаем (III, рубр. 27), что совокупность двух параллельных векторов $\omega_I u$ и $\omega_l u$, приложенных соответственно в точках I и C_l , эквивалентна одному вектору $\omega_\lambda u$, приложенному в точке Γ_λ ; сравнивая эти результаты, получаем:

$$\omega_\lambda = \omega_I + \omega_l; \quad (3)$$

приравнивая результирующие моменты относительно точки I и замечая, что расстояния $\Gamma_\lambda I$ и $C_l I$ представляют собою не что иное, как радиусы кривизны ρ_λ и r_l кривых λ и l (взятые с надлежащими знаками), найдем:

$$\rho_\lambda \omega_\lambda = r_l \omega_l.$$

Общее значение этих двух произведений представляет собою не что иное, как (скалярную) скорость v_I полюса I как по кривой λ , так и по l (взятую со знаком, соответствующим принятой на IT положительной стороне обращения), мы получим, таким образом:

$$\omega_\lambda = \frac{v_I}{\rho_\lambda}, \quad \omega_l = \frac{v_I}{r_l};$$

подставляя же эти выражения в равенство (3), найдем окончательно:

$$\omega = v_I \left(\frac{1}{\rho_\lambda} - \frac{1}{r_l} \right). \quad (4)$$

Эта формула дает возможность вычислить скалярное значение скорости движения мгновенного центра по полярным траекториям по данной угловой скорости, и обратно.

Если через θ обозначим угол, ориентирующий подвижную плоскость, т. е. аномалию, которую прямая, связанная с движущейся плоскостью, образует с некоторой прямой на неподвижной плоскости, то естественно

$$\omega = \frac{d\theta}{dt};$$

с другой стороны, если через $d\lambda$ обозначим элемент базы, при-

к Φ и (относительным) движением осей Φ' относительно s ; 3) как образованное (переносным) движением профиля γ по отношению к осям Φ и (относительным) движением осей Φ' по отношению к γ ¹⁾.

Каждая из этих точек зрения, как мы увидим, приводит к некоторому свойству положения мгновенного центра J системы Φ' относительно Φ . Сопоставление этих свойств, в свою очередь, непосредственно приводит к результату, который мы имеем в виду получить.

25. С первой точки зрения, мы непосредственно замечаем, что точка J лежит на прямой IT'' , проведенной через I параллельно MT' .

В самом деле, MN' представляет собой прямую, неразрывно связанную с Φ' ; эта прямая, будучи общей нормалью к сопряженным профилям s и γ , постоянно проходит через I . И так как I является некоторой определенной точкой Φ , то мгновенный центр J должен находиться на перпендикуляре к MN' , или, что то же, на прямой, параллельной к MT' и проходящей через I .

Переходя теперь ко второй и к третьей точкам зрения, целесообразно припомнить соображения рубр. 22. Применяя сначала вторую точку зрения, заметим, что при движении осей Φ' относительно s мгновенный центр вращения совпадает с центром кривизны C кривой s ; при движении же кривой s , которое совпадает с движением неразрывно связанной с ней кривой γ относительно осей Φ , аналогичный центр совпадает с центром C_1 рулетты. Вследствие этого в результирующем движении осей Φ' относительно Φ мгновенный центр вращения лежит на прямой CC_1 ²⁾.

Исходя из третьей точки зрения, мы совершенно таким же образом заключаем, что точка J лежит на прямой $\Gamma\Gamma_\lambda$, где Γ — центр кривизны профиля γ , а Γ_λ — центр кривизны базы λ .

Учитывая установленные таким образом три свойства точки J , мы прямо приходим к следующей теореме Савари ³⁾.

Так называемая формула Савари была, строго говоря, дана раньше Эйлером.

1) Когда речь идет о движении по отношению к кривой, то под этим нужно, конечно, разуметь движение относительно плоскости, которая с этой кривой неразрывно связана. (Ред.)

2) Чтобы оправдать это утверждение, заметим, что всякое состояние плоского движения (имеющего мгновенный центр на конечном расстоянии) можно рассматривать, как вращение вокруг некоторой прямой, перпендикулярной к плоскости движения. Вследствие этого, когда два плоские движения происходят совместно (с мгновенными центрами на конечном расстоянии), то составленное движение также имеет характер вращения (III, рубр. 27), ось которого лежит в плоскости осей составляющих вращений. Поэтому пересечения трех осей с плоскостью движения, т. е. мгновенные центры трех вращений, расположены на одной прямой.

3) Ф. Савари (Felix Savary) родился в Париже в 1797 г., умер в Эстажели (Estagel, Восточные Пиренеи) в 1841 г., состоял профессором астрономии и геодезии в политехнической школе. Доказательство геометрической теоремы, приведенной в тексте, было дано Кенигсом (Königs, см. „Bulletin des sciences mathématiques“, т. XXXI, 1907).

Если C и Γ суть центры кривизны произвольных двух сопряженных профилей в соответственных точках, а C_1 и Γ_1 — центры кривизны двух полярных траекторий, то прямые CC_1 и $\Gamma\Gamma_1$ пересекаются в точке J , принадлежащей прямой IT'' , которая проходит через мгновенный центр I параллельно общей касательной двух профилей.

26. К этому результату конструктивного характера присоединяется замечательное метрическое соотношение между радиусами кривизны. Чтобы притти к этому соотношению наиболее кратким путем и притом соединить в одной формуле всевозможные случаи, не разбирая на рисунках отдельно различные возможные здесь комбинации, целесообразно воспользоваться средствами аналитической геометрии.

За оси координат x и y примем наши две взаимно перпендикулярные прямые IT и IN , ориентированные согласно этому их обозначению; стороны обращения осей, таким образом, первоначально выбраны совершенно произвольно. Далее, примем IM за положительную сторону общей нормали к сопряженным профилям; наконец, обозначим через α аномалию этой полупрямой относительно оси x и через δ расстояние IM . Теперь через r и ρ обозначим радиусы кривизны кривых s и γ , т. е. отрезки MC и $M\Gamma$, взятые с надлежащими знаками относительно стороны обращения IM , принятой за положительную на общей нормали обоих профилей. Вместе с тем $r + \delta$, $\rho + \delta$ выражают по величине и знаку отрезки $IC = IM + MC$, $I\Gamma = IM + M\Gamma$; вследствие этого их компоненты, т. е. координаты x , y точек C и Γ , выразятся соответственно следующими формулами:

$$x = (r + \delta) \cos \alpha, \quad y = (r + \delta) \sin \alpha \text{ для точки } C,$$

$$x = (\rho + \delta) \cos \alpha, \quad y = (\rho + \delta) \sin \alpha \text{ для точки } \Gamma.$$

Что касается центров кривизны C_1 и Γ_1 двух полярных траекторий, которые оба расположены на прямой IN , т. е. на оси y , то мы обозначим соответствующие ординаты через r_1 и ρ_1 ; по существу, это радиусы кривизны двух кривых, взятые с надлежащими знаками относительно стороны обращения IN , принятой на нормали за положительную.

При этих условиях уравнения прямых CC_1 и $\Gamma\Gamma_1$, соединяющих точки

$$(r + \delta) \cos \alpha, (r + \delta) \sin \alpha \text{ и } 0, r_1$$

и соответственно

$$(\rho + \delta) \cos \alpha, (\rho + \delta) \sin \alpha \text{ и } 0, \rho_1,$$

имеют вид:

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (r + \delta) \cos \alpha & (r + \delta) \sin \alpha & 1 \\ 0 & r_1 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ (\rho + \delta) \cos \alpha & (\rho + \delta) \sin \alpha & 1 \\ 0 & \rho_1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Радиусы кривизны r_l и ρ_λ мы, естественно, можем считать отличными от нуля (мы можем ограничиться кривыми, которые имеют правильное изгибание в точках, о которых идет речь); более того, мы первоначально предположим, что не обращаются в нуль ни $r + \delta$, ни $\rho + \delta$. Мы должны будем вследствие этого разобрать по окончательной формуле, что происходит, когда $r + \delta$ или $\rho + \delta$ обращается в нуль, т. е., когда одна из точек C или Γ совпадает с мгновенным центром I .

После этих ограничений мы можем разделить первое уравнение на $r_l(r + \delta)$, а второе на $\rho_\lambda(\rho + \delta)$; положив затем для краткости

$$q = \frac{1}{r + \delta} - \frac{\sin \alpha}{r_l},$$

$$\chi = \frac{1}{\rho + \delta} - \frac{\sin \alpha}{\rho_\lambda},$$

мы приведем наши два уравнения к виду:

$$qx + \cos \alpha \left(\frac{y}{r_l} - 1 \right) = 0,$$

$$\chi x + \cos \alpha \left(\frac{y}{\rho_\lambda} - 1 \right) = 0;$$

вычитая их теперь почленно, получим уравнение

$$(q - \chi)x + \cos \alpha \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{\rho_\lambda} \right) y = 0$$

прямой, соединяющей начало I с точкой пересечения J рассмотренных выше прямых.

Так как по геометрической теореме Савари эта прямая должна быть перпендикулярна к прямой IM , угловым коэффициентом которой служит $\tan \alpha$, то

$$\sin \alpha (q - \chi) = \cos^2 \alpha \left(\frac{1}{r_l} - \frac{1}{\rho_\lambda} \right);$$

принимая же во внимание значение q и χ , получим:

$$\sin \alpha \left(\frac{1}{r + \delta} - \frac{1}{\rho + \delta} \right) = \frac{1}{r_l} - \frac{1}{\rho_\lambda}; \quad (6)$$

это и есть формула Савари.

Припомним, что правая часть этого равенства, согласно соотношению (5), отличается только знаком от производной $dh/d\lambda$, где θ есть угол, ориентирующий положение подвижной фигуры.

Заметим, наконец, что в том случае, когда какая-либо из четырех кривых l , λ , c , γ обращается в прямую, соответствующий радиус кривизны становится бесконечно большим (кривизна обращается в нуль), и один из членов формулы (8) выпа-

дает (тот, в котором фигурирует этот радиус); но $\frac{1}{r_l}$ и $\frac{1}{\rho_\lambda}$ не могут тождественно совместно обратиться в нуль, потому что обе полярные траектории не могут быть прямолинейными, поскольку речь идет о действительном качении.

27. При выводе соотношения (6) мы заранее исключили случай, когда обращается в нуль хотя бы одна из сумм $r + \delta$ или $\rho + \delta$. Но ничто не мешает допустить, что тот или иной из отрезков IC или IT отличается от нуля сколь угодно мало. Положим сначала, что $\sin \alpha \neq 0$. Если тогда одна из этих сумм стремится к нулю, то соотношение (6) обнаруживает, что и другая стремится к нулю. Переходя к пределу, мы получаем следующий вывод: *если центр кривизны одного из двух профилей падает в точку I (что соответствует уничтожению бинорма $r + \delta$ или $\rho + \delta$), то в ту же точку падает центр кривизны сопряженного профиля.*

Ограничение $\sin \alpha \neq 0$ выражает, что общая нормаль в сопряженных профилях не совпадает с общей касательной к полярным траекториям. Чтобы от него освободиться, достаточно в установленном только что выводе, справедливым при $\sin \alpha \neq 0$, перейти к пределу в предположении, что $\sin \alpha$ стремится к нулю; это соотношение при этом остается без изменения, так как угол α в нем вовсе не фигурирует.

К тому же выводу можно было бы прийти, исходя прямо из геометрической теоремы Савари, т. е. из того факта, что прямые CS , IT , IT'' проходят через одну и ту же точку.

28. Дальнейшее следствие мы получим, если предположим, как в рубр. 9, что кривая c сводится к одной только точке P подвижной фигуры. В этом случае r обращается в нуль, а потому точка C совпадает с P ; кривая γ есть траектория точки P , соотношение (6) служит для определения радиуса кривизны ρ траектории произвольной точки P фигуры в функции орд , α , r_l и ρ_λ ; все эти величины непосредственно известны, коль скоро задано движение фигуры и положение точки P на ней.

С точки зрения конструктивной, это приводит к следующему эквивалентному выводу: *центр кривизны Γ траектории γ в произвольной точке P определяется пересечением нормали с прямой $\Gamma_\lambda J$, где J , в свою очередь, представляет собой пересечение прямой Pl с параллелью IT'' к касательной к кривой γ в точке P .*

8. Эпициклическое движение.

29. Согласно определению, данному в рубр. 11, плоское движение является эпициклическим, если как рулеттой, так и базой служат окружности. Траектории, описываемые отдельными точками подвижной фигуры, называются в этом случае *эпициклоидами*; мы займемся, прежде всего, изучением этих кривых.

Для определенности будем предполагать, что рулетка l имеет с базой λ внешнее касание.

Пусть a и b будут радиусы окружностей l и λ , O и Ω — соответствующие центры их (фиг. 63). Пусть P будет произвольная точка подвижной фигуры, с которой неразрывно связана окружность l , а p пусть будет расстояние точки P от центра O окружности l .

Когда окружность l катится, то радиус OP принимает всевозможные направления.

Остановимся на том положении рулетки, при котором две полупрямые OP и $O\Omega$ представляют собой продолжения одна другой; через I_0 обозначим мгновенный центр, соответствующий этому положению; четыре точки Ω , I_0 , O , P расположены на одной прямой в том порядке, как мы их называем. Установленный таким образом радиус базы примем за ось $\Omega\xi$, и к ней присоединим в качестве второй оси перпендикуляр $\Omega\eta$.

Рассмотрим теперь произвольное другое положение окружности l .

Пусть α будет угол, который радиус $O\Omega$ в этом втором положении образует с осью абсцисс $\Omega\xi$; этот угол мы будем считать положительным в сторону возрастающих аномалий, т. е. от оси $\Omega\xi$ к $\Omega\eta$.

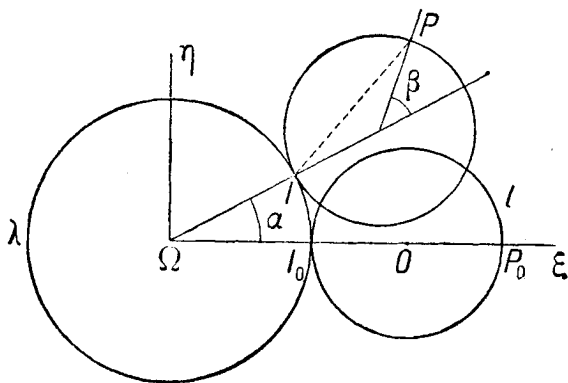
Пусть, далее, I будет мгновенный центр, соответствующий второму положению. Радиус OP после поворота отклонится от OI в том же направлении на угол β , который легко выразить через α . В самом деле, $a|\beta|$ выражает длину смещения точки касания по окружности l ; $b|\alpha|$ выражает длину ее смещения по окружности λ . А так как одна окружность катится по другой без скольжения, то эти дуги равны между собой; их знаки, в силу наших соглашений, совпадают.

Поэтому

$$\alpha\beta = b\alpha.$$

30. Исходя из этого, мы непосредственно получаем выражения для координат ξ и η точки P при произвольном положении рулетки, а вместе с тем и параметрические уравнения ее траекторий; для этого достаточно спроектировать на оси координат обе части векторного тождества

$$\overline{OP} = \overline{O\Omega} + \overline{OP}.$$



Фиг. 63.

Если теперь примем во внимание, что вектор $\overline{QO}$ имеет длину (постоянную) $a + b$ и аномалию (переменную) α , вектор же $\overline{OI}$ имеет длину (также постоянную) p и переменную аномалию

$$\alpha + \beta = \left(1 + \frac{b}{a}\right)\alpha,$$

то найдем непосредственно:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a + b) \cos \alpha + p \cos k\alpha, \\ \eta &= (a + b) \sin \alpha + p \sin k\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

где через k для краткости обозначена постоянная $1 + \frac{b}{a}$.

Уравнения (7), очевидно, представляют собой параметрические уравнения траекторий точки P , они определяют координаты ξ и η произвольной точки этой кривой через один переменный параметр α , так как a , b , p имеют постоянные положительные значения, первоначально совершенно произвольные, а $k = 1 + \frac{b}{a}$.

Обыкновенную эпициклоиду, т. е. траекторию точки, лежащей на самой катящейся окружности, получим, если положим $p = a$. Рисунок, помещенный в следующей рубрике, содержит изображения трех типов эпициклоиды: удлиненной, обыкновенной и укороченной.

31. Прежде всего, отметим одну особенность качественного свойства, принадлежащую эпициклоидам всех трех типов. Каждая эпициклоида составляется из ряда (вообще бесконечного) конгруэнтных между собой дуг, которые называются ветвями эпициклоиды. Чтобы составить себе ясное представление о такой ветви, нужно проследить катящуюся окружность с ее начального положения (соприкосновения в точке I_0) до того момента, когда та же точка окружности l вновь приходит в соприкосновение с базой (фиг. 64). При этих условиях $\beta = 2\pi$; а так как $b\alpha = a\beta$, то мы получаем для α значение:

$$2\pi \frac{a}{b} = \frac{2\pi}{k-1}.$$

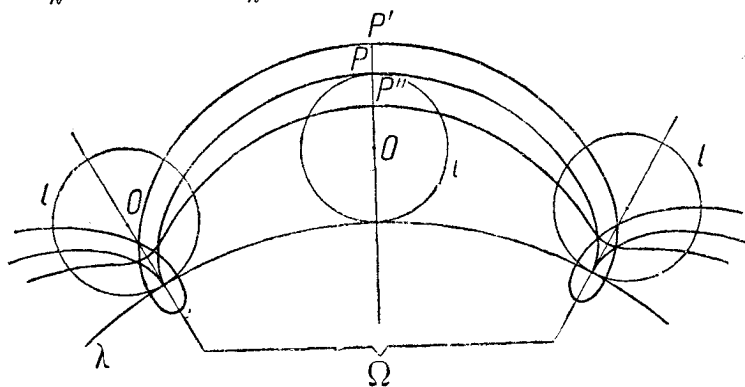
Это значит, что за промежуток времени, в течение которого окружность l совершает полный оборот, каждая точка P , неизменно с нею связанная, поворачивается вокруг Ω на угол

$$\Theta = \frac{2\pi}{k-1}.$$

За это время она описывает определенную дугу кривой с угловым отверстием Θ (относительно Ω), которая и представляет собой ветвь эпициклоиды. В самом деле, следя за катящейся окружностью l , мы видим, что точка P , неизменно связанная

с этой окружностью, приходит в то же положение относительно базы после каждого полного оборота окружности l ; за эти промежутки она описывает дуги, которые постоянно равны первой из них и переходят одна в другую поворотом вокруг точки Ω на угол Θ .

32. Если дуга Θ соизмерима с 2π , то кривая замыкается. В самом деле, коль скоро существует такая рациональная дробь $\frac{m}{n}$, что $\Theta = m \cdot \frac{2\pi}{n}$, то $n\Theta$ есть кратное 2π . Это значит,



Фиг. 64.

что точка P , описав n ветвей, возвращается в точку исхода; продолжая движение, она будет описывать те же ветви. Напротив, совершенно ясно, что в том случае, когда угол Θ несоизмерим с 2π , ни одна из последующих ветвей не совпадает с предыдущими.

Так как $\Theta = \frac{2\pi}{k-1}$, то соизмеримость числа Θ с 2π эквивалентна рациональности дроби $k-1 = \frac{b}{a}$ или, что то же, соизмеримости радиусов a и b рулетты и базы.

33. Уравнения (7) отнесены к осям специального расположения. Мы легко перейдем к произвольным осям, конечно, при том же начале Ω , если сообразим, что здесь все сводится к смещению начала отсчета углов α и $\alpha + \beta = k\alpha$.

Если φ есть угол, первоначально произвольный, на который повернуты оси (в положительную сторону, т. е. в сторону возрастающих аномалий), то мы получим вместо уравнения (7) формулы:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= (a+b) \cos(\alpha - \varphi) + p \cos(k\alpha - \varphi), \\ \eta &= (a+b) \sin(\alpha - \varphi) + p \sin(k\alpha - \varphi). \end{aligned} \right\} \quad (7')$$

Если, в частности, положим здесь

$$\varphi = \Theta = \frac{2\pi}{k-1}$$

и в то же время заменим α на $\alpha' + \Theta$, что даст

$$\alpha - \varphi = \alpha', \quad k\alpha - \varphi = k\alpha' + 2\pi,$$

то уравнения (7') примут вид:

$$\begin{aligned}\xi &= (a + b) \cos \alpha' + p \cos k\alpha', \\ \eta &= (a + b) \sin \alpha' + p \sin k\alpha' .\end{aligned}$$

Эти уравнения совпадают, таким образом, с прежними уравнениями (7), если в последних заменить α на α' . Параметрические уравнения эпициклоиды, таким образом, вовсе не изменяются, если повернуть оси на угол Θ . Это означает, что кривая занимает то же положение относительно повернутых осей, как и относительно первоначальных, т. е. что она не меняется при повороте на угол Θ вокруг точки Ω . Мы имеем, таким образом, новое доказательство сопоставления, проведенного в рубр. 31.

34. Рядом с эпициклоидой, которая описана произвольной точкой P , неизменно связанной с окружностью l , рассмотрим другую, которую описывает точка P' , симметричная с P относительно O . Если на момент возвратимся к рубр. 29 и 30, то мы сейчас же убедимся, что параметрические выражения координат ξ, η' точки P' , отнесенные к тем же осям $\Omega\xi, \eta$, которые были приняты для выражения траектории точки P , получаются путем увеличения в выражениях координат точки P угла β , а следовательно, и угла $\alpha + \beta = k\alpha$ на π . Они имеют вид:

$$\left. \begin{aligned}\xi' &= (a + b) \cos \alpha - p \cos k\alpha, \\ \eta' &= (a + b) \sin \alpha - p \sin k\alpha.\end{aligned} \right\} \quad (7'')$$

Ввиду симметрии точек P и P' по отношению к точке O , их относительные положения (по отношению к точке соприкосновения с базой), очевидно, замещают друг друга после поворота окружности l , что составляет поворот вокруг Ω на угол $\frac{\Theta}{2}$. Траектории, описанные точками P и P' , оказываются, таким образом, равными: они приводятся в совмещение поворотом на угол $\frac{\Theta}{2}$ вокруг точки Ω .

Мы можем получить и формальное подтверждение этого, полагая в уравнениях (7') $\varphi = \frac{\Theta}{2} = \frac{\pi}{k-1}$ и заменяя в то же время $\alpha - \varphi$ через α' , а вместе с тем, $k\alpha - \varphi = k\alpha' + \pi$; мы получаем тогда уравнение (7'') при параметре α' вместо α .

35. До сих пор мы держались предположения (рубр. 29), что рулетка катится по своей базе, оставаясь вне ее. Если же, наоборот, рулетка движется внутри базы или база остается внутри рулетки, вообще в тех случаях, когда рулетка и база имеют внутреннее касание, все протекает геометрически совершенно аналогично. Что же касается формул, в частности, пара-

метрического выражения траектории, то очень легко убедиться, что они получаются путем замены в полученных выше формулах числа a на $-a$; таким образом вместо уравнений (7) мы получаем следующие:

$$\begin{cases} \xi = (b - a) \cos \alpha + p \cos k\alpha, \\ \eta = (b - a) \sin \alpha + p \sin k\alpha. \end{cases} \quad (8)$$

Само собой разумеется, что при замене a на $-a$ значение k станет равным $1 - \frac{b}{a}$, остальные же буквы a, b, p, α сохраняют свои значения. Эти два случая, когда рулетта находится внутри базы или база внутри рулетты, отличаются от рассмотренного выше наименованием *гипоциклического движения*. Траектории, описываемые при этом точками движущейся фигуры, называются *гипоциклоидами*. Не останавливаясь на доказательстве¹⁾, заметим, что при $a > b$ эти траектории также входят в число эпициклоид (образующихся при внешнем качении). Действительное отличие в характере траектории, таким образом, имеет место только в том случае, когда рулетта катится внутри базы (a не наоборот). Заметим, наконец, что из формул (7) непосредственно вытекает теорема *Кардана* (рубр. 13), именно: при $b = 2a$ *гипоциклоида — траектория произвольной точки рулетты — сводится к диаметру базы*.

В самом деле, если положим $b = 2a$, т. е. $b - a = a$, то $k = 1 - \frac{b}{a} = -1$ и $p = a$; поэтому второе из уравнений (8) дает $\eta = 0$.

Уравнения (8) вновь приводят к факту, доказанному уже в рубр. 15, что траектория всякой точки P , неизменно связанной с рулеттой, но не лежащей на ней, представляет собою эллипс. В самом деле, при $b - a = a$, $k = -1$ и при произвольном p уравнения (8) принимают вид:

$$\xi = (a + p) \cos \alpha, \quad \eta = (a - p) \sin \alpha.$$

Исключая отсюда α , мы получаем траекторию (при $p \neq a$):

$$\frac{\xi^2}{(a+p)^2} + \frac{\eta^2}{(a-p)^2} = 1.$$

36. Элемент дуги обыкновенной эпициклоиды и длина конечной дуги. Продифференцируем уравнения (7), рассматривая как переменную только параметр α ; это соответствует переходу от произвольной точки (ξ, η) кривой к весьма близкой точке $\xi + d\xi, \eta + d\eta$. Мы получим:

$$\begin{aligned} d\xi &= -\{(a + b) \sin \alpha + pk \sin k\alpha\} d\alpha, \\ d\eta &= \{(a + b) \cos \alpha + pk \cos k\alpha\} d\alpha. \end{aligned}$$

¹⁾ Это доказательство можно найти в сочинении *G. Loria, Specielle algebraische und transcendente ebene Kurven*, Leipzig, Teubner, 1902; S. 482—483.

В случае обыкновенной эпициклоиды при $p = a$ и $k = 1 + \frac{b}{a}$, как обыкновенно, оба коэффициента $a + b$ и pk становятся равными. Если вслед затем воспользуемся тригонометрическими тождествами:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha + \sin k\alpha &= 2 \sin \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}(k-1)\alpha, \\ \cos \alpha + \cos k\alpha &= 2 \cos \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}(k-1)\alpha, \end{aligned} \right\}$$

и соотношением между α и β (рубр. 29), т. е. напомним вместо β $k-1$ α , то дифференциалы координат примут вид:

$$dx = -2(a+b) \sin \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cdot d\alpha,$$

$$d\eta = 2(a+b) \cos \frac{1}{2}(k+1)\alpha \cos \frac{1}{2}\beta \cdot d\alpha.$$

Отсюда вытекает следующее выражение для дифференциала дуги:

$$ds = \sqrt{dx^2 + d\eta^2} = 2(a+b) \left| \cos \frac{1}{2}\beta \cdot d\alpha \right|. \quad (9)$$

Для большей ясности остановимся на полной ветви кривой (рубр. 31), содержащейся между значениями $-\pi$ и π угла β , т. е. между двумя последовательными (угловыми) точками эпициклоиды, принадлежащими базе. Если при этом считать дугу s положительной в направлении возрастающих α , то в формуле (9) можно опустить знак абсолютного значения; воспользовавшись вновь соотношением

$$\beta = (k-1)\alpha = \frac{b}{a}\alpha,$$

можно, очевидно, заменить $d\alpha$ через $d\beta$, что приводит к выражению:

$$ds = 4a \frac{a+b}{b} \cos \frac{1}{2}\beta \cdot \frac{1}{2} d\beta. \quad (9')$$

Интегрируя это выражение от $-\pi$ до произвольного значения β ($\leq \pi$)¹⁾, мы получим для длины дуги обыкновенной эпициклоиды (считая от угловой ее точки) выражение:

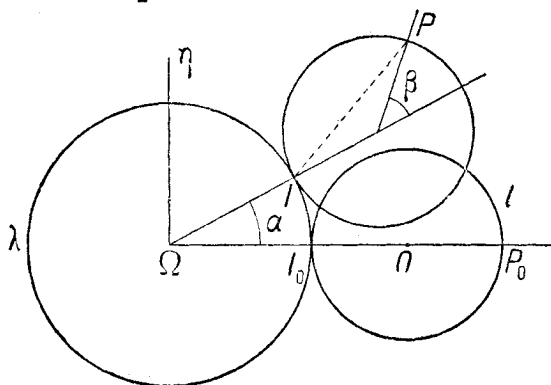
$$s = 4a \frac{a+b}{b} \left(\sin \frac{1}{2}\beta + 1 \right).$$

Полагая здесь $\beta = \pi$, мы найдем длину полной ветки кривой, именно:

$$8a \frac{a+b}{b}.$$

¹⁾ Для других значений β угол, о котором идет речь, имел бы значение $\alpha + \frac{\beta_0}{2}$, где β_0 означает приведенное значение β , т. е. угол, содержащийся в интервале $(-\pi, \pi)$ и отличающийся от β на кратное 2π .

37. Радиус кривизны. В случае обыкновенной эпициклоиды описывающая ее точка P принадлежит окружности l (фиг. 65); в этом случае из чертежа совершенно ясно, что для значений β , содержащихся между $-\pi$ и π , нормаль IP образует с осью $\Omega\xi$ угол $\alpha + \frac{\beta}{2}$; отсюда следует, что нормали в двух бесконечно



Фиг. 65.

близких точках образуют угол

$$d\alpha + d\frac{\beta}{2},$$

который, очевидно, равен углу между соответствующими касательными, т. е. представляет собой так называемый угол смежности. Отношение этого угла (взятого по абсолютной величине) к длине дуги, содержащейся между теми

же точками, представляет меру кривизны кривой; обратное отношение выражает радиус кривизны ¹⁾.

Так как

$$d\alpha + \frac{1}{2} d\beta = \left(1 + \frac{1}{2} \frac{b}{a}\right) d\alpha = \frac{1}{2} \frac{2a+b}{a} d\alpha,$$

то мы получаем из выражения (9):

$$r = \frac{2(a+b)}{2a+b} 2a \left| \cos \frac{1}{2} \beta \right|. \quad (10)$$

Сохраняя ограничение $-\pi \leq \beta \leq \pi$, мы видим по чертежу (когда точка лежит на окружности l и вписанный угол в точке P составляет $\frac{\pi}{2}$), что длина δ отрезка IP выражается формулой:

$$\delta = 2a \cos \frac{1}{2} \beta. \quad (11)$$

При указанных пределах для угла β (т. е., собственно говоря, для произвольных его значений) можно вместо $\cos \frac{1}{2} \beta$

¹⁾ Радиус кривизны мы здесь рассматриваем, как это обыкновенно делается, в его абсолютном численном значении. Иногда, однако, бывает удобно приписывать ему знак; это всякий раз основывается на соглашениях, обусловливаемых характером исследования. Мы имели уже такого рода пример в предыдущем параграфе: при соглашениях относительно знака радиуса кривизны, установленных в рубр. 26, формула Савари получила выражение, пригодное во всех случаях; без этого при определении абсолютного значения радиуса кривизны было бы необходимо принимать во внимание различные случаи, которые здесь могут представиться.

написать $\left| \cos \frac{1}{2} \beta \right|$; сопоставляя это с предыдущим выражением радиуса кривизны r , получим:

$$r = \frac{2(a+b)}{2a+b} \delta. \quad (10')$$

Мы видим, таким образом, что радиус кривизны в произвольной точке обыкновенной эпициклоиды пропорционален расстоянию этой точки от мгновенного центра I .

38. Приложение построения Савари. К этому же результату мы приходим и более простым путем, основываясь на геометрической теореме Савари (рубр. 25). С этой целью начнем с определения точек, которые в нашем случае должны заменить C , Γ , C и Γ , фигурирующие в общем выражении теоремы.

Точками C и Γ служат центры O и Ω окружностей λ и l (фиг. 66). С другой стороны, поскольку мы здесь имеем дело с обыкновенной эпициклоидой, описываемой точкой P окружности l (так что профиль s сводится к одной только точке P), C совпадает с самой точкой P ; точка же Γ , собственно, и составляет центр кривизны, о котором идет речь в общем предложении.

Отметим еще следующее соображение: если P' есть точка окружности l , диаметрально противоположная P , то прямая IP' оказывается перпендикулярной к IP и совпадает с параллелью к касательной IT'' , фигурирующей в общей теореме; следовательно, прямые IP' и PO пересекаются в точке P' . Свойство, которое нам нужно использовать, заключается в том, что через ту же точку должна пройти также прямая $\Omega\Gamma$. Этим однозначно определяется центр кривизны Γ , как пересечение прямых $\Omega P'$ и IP .

Продолжим прямую ΩO до вторичного пересечения с окружностью l в точке I' и проведем отрезок $P'I'$; он неизбежно будет равен и параллелен отрезку IP .

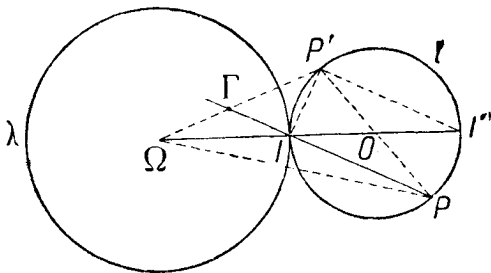
Отсюда следует, что два треугольника $\Omega\Gamma I$ и $\Omega P'I'$ подобны между собой; поэтому

$$\frac{\Gamma I}{P'I'} = \frac{\Omega I}{\Omega I'} = \frac{b}{2a+b}.$$

Написав IP вместо $P'I'$ и прибавив по единице к первому и третьему членам этого равенства, получим:

$$\frac{\Gamma I + IP}{IP} = \frac{2(a+b)}{2a+b},$$

что как раз совпадает с соотношением (10), так как $IP = \delta$ и $\Gamma I + IP = \Gamma P = r$.



Фиг. 66.

39. Эволюта. Подобие треугольников ΩGI и $\Omega P' I'$ влечет за собой еще пропорции:

$$\frac{\Omega G}{\Omega P'} = \frac{\Omega I}{\Omega I'} = \frac{b}{2a+b};$$

отсюда ясно, что точки G и P' , расположенные на одной прямой с Ω , описывают (с изменением P) гомотетические кривые (т. е. подобные и подобным образом расположенные) относительно Ω .

С другой стороны, мы знаем (рубр. 34), что траектория точки P' представляет собой эпициклоиду, конгруэнтную с траекторией точки P , ибо она с ней совмещается поворотом на

угол $\frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{k-1}$ вокруг Ω . Отсюда вытекает следующая теорема: *эволютой обыкновенной эпициклоиды (т. е. геометрическим местом ее центров кривизны G) служит подобная ей эпициклоида; но она не расположена подобно данной эпициклоиде относительно центра базы Ω , а повернута на угол $\pi(k-1)$.*

Вряд ли нужно указывать, что к определению эволюты можно прийти также чисто аналитически; для этого достаточно выразить координаты ξ^* и η^* точки G , основываясь на векториальном тождестве

$$\overline{\Omega G} = \overline{PG} + \overline{\Omega P}.$$

Формулы, получающиеся для ξ^* и η^* , непосредственно дают параметрические выражения эволюты; сопоставляя их с уравнением (7'), мы придем к формулированному уже выше выводу.

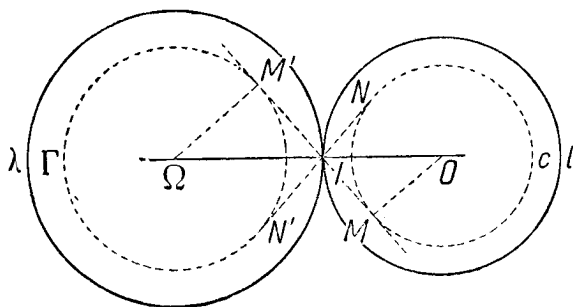
40. Сопряженные эпициклические и гипоциклические профили. Как для всех видов твердых плоских движений, так и для эпициклических имеют особое значение сопряженные профили. Мы остановимся здесь на одной категории их, к которой приводит общий метод, изложенный в рубр. 19; речь здесь идет о типичном примере этого метода, от которого, собственно, ведет свое начало и его название (эпициклический метод).

В качестве профиля s , неразрывно связанного с движущейся фигурой, а следовательно, с окружностью l , возьмем дугу эпициклоиды, имеющей окружность l своей базой, а рулеттой произвольную окружность k . Мы можем непосредственно утверждать (рубр. 35), что сопряженный профиль γ в этом случае представляет собой дугу гипоциклоиды, которая имеет своей базой окружность l и рулеттой ту же окружность k , если только остановимся на предположении, что окружности l и k имеют внешнее касание. Действительно, достаточно себе представить эти три кривые, соприкасающиеся в точке I , чтобы стало ясно, что окружность k касается внешне окружности l , если она имеет с l внутреннее касание, и обратно. Отсюда следует, что s есть дуга гипоциклоиды, γ — дуга эпициклоиды.

Если бы окружности l и k имели внутреннее касание, то вспомогательная окружность k , катясь по l , дала бы сопряженные профили одного и того же типа, т. е. оба профиля были бы эпициклическими или гипоциклическими.

К интересному частному случаю приводит предположение, что радиус окружности k представляет половину радиуса окружности l и что точка, образующая профили s и γ (которая в общем случае просто неизменно связана с k) лежит на самой окружности k . В этом случае (рубр. 11), эпициклоида s вырождается в диаметр окружности l ; это приводит к следующему выводу: *профиль, сопряженный с диаметром рулетки l , состоит из ветвей обыкновенной эпициклоиды; эта эпициклоида образуется качением по той же базе l окружности, имеющей вдвое меньший радиус, нежели окружность l .*

41. Сопряженные профили эвольвент окружностей, концентрических с рулеткой. Мы уже выше (рубр. 39) занимались эволютой эпициклоиды, которая определялась как геометрическое место центров кривизны. Однако, как известно из анализа и как это, в сущности, непосредственно вытекает из определения центра кривизны, эволюту любой плоской кривой s можно еще определить, как огибающую s' нормалей кривой s . Иными словами, эволюта кривой s есть такая кривая s' , касательными которой служат нормали исходной кривой s .



Фиг. 67.

Припомним также, что под эвольвентой (или разверзающей) кривой s разумют любую из бесчисленного множества кривых C , которые имеют эволютой кривую s , нормальными которых поэтому служат касательные кривой s . Если кривая s задана, то ее эвольвенту, как известно, можно построить следующим образом: на кривой s мы выбираем произвольную точку P_0 и сторону обращения самой кривой или соответствующих касательных. Затем к каждой точке кривой P мы относим ту точку Q на соответствующей касательной, для которой отрезок PQ по длине и стороне обращения равен дуге $\widehat{P_0P}$. Геометрическое место этих точек Q и есть эвольвента кривой s . Как мы видим, их вообще имеется бесчисленное множество в зависимости от выбора точки P_0 . Исходя из этого, мы докажем следующее: эвольвенты окружностей, концентрических с рулеткой и расположенных внутри нее, имеют в качестве сопряженных профилей кривые того же типа, а именно — эвольвенты окружностей, концентричных с базой и расположенных внутри последней.

В частности, предположим, что s есть окружность, концентрическая с l и расположенная внутри нее (фиг. 67). Пусть IM и IN будут две касательные, проведенные из точки I к окруж-

ности c ; они служат нормальными каждой эвольвенты C этой окружности c .

Легко убедиться, что огибающая γ какой-либо из этих кривых C , в свою очередь, представляет эвольвенту некоторой окружности Γ , концентрической с λ . В самом деле, в любом положении рассматриваемой фигуры нормали IM и IN к кривой C , проходя через точку I , служат также нормальными (рубр. 8) к сопряженному профилю γ . С другой стороны, они касаются в точках M' и N' некоторой окружности Γ , концентрической с λ ; и эта окружность Γ всегда остается той же, каково бы ни было положение рулетты, ибо радиус $\Omega M'$ окружности Γ неизменно связан с радиусом OM окружности c ; это вытекает непосредственно из подобия треугольников $\Omega IM'$ и OIM , которое дает:

$$\frac{\Omega M'}{OM} = \frac{\Omega I}{OI} = \frac{b}{a}.$$

Это обнаруживает, что кривая γ подобна C при отношении подобия $\frac{a}{b}$.

42. Предельные случаи. Здесь целесообразно рассмотреть два интересных предельных случая эпициклического движения. Мы придем к ним, если будем беспредельно ограничивать радиус b базы или радиус a рулетты, так что та или иная из двух кривых вырождается в прямую. Если в прямую обращается база, то движение называется *циклоидальным*. Как известно, *циклоидами* называются траектории, описываемые в этих условиях точками рулетты; траектории же, описываемые точками, неизменно связанными с рулеттой, называются *трохоидами*; их называют также *удлиненными* или *укороченными* циклоидами, смотря по тому, лежит ли образующая точка вне рулетты или внутри нее.

Если же, напротив, в прямую обращается рулетта, то траектории ее точек образуют (предыдущая рубрика) эвольвенты базы; траектории точек, неразрывно связанные с рулеттой, также обыкновенно именуются *удлиненными* или *укороченными* в зависимости от того, находится ли образующая точка с той же стороны прямолинейной рулетты, что и база, или с противоположной.

Параметрические формулы эпициклического движения вообще непригодны для непосредственного перехода к пределу, соответствующему бесконечному значению a или b ; но такой переход можно выполнить в формулах Савари (как уже было замечено в рубр. 27). Так, например, при $l = \infty$ уравнение (10') дает $r = 2b$, хорошо известное выражение радиуса кривизны обыкновенной циклоиды.

43. Некоторые свойства обыкновенной циклоиды. В предыдущей рубрике мы рассмотрели циклоидальное движение как предельный случай эпициклического. Основываясь на этом, можно исследовать самую циклоиду, пользуясь теми же соображениями

Полная дуга циклоиды получается, когда θ проходит через все значения от $-\pi$ до $+\pi$.

б) *Длина дуги.* Так как

$$d\xi = a(1 + \cos \theta) \cdot d\theta, \quad d\eta = -a \sin \theta \cdot d\theta,$$

то длина ds элемента дуги, отсчитываемой в сторону возрастающих θ , выражается формулой:

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = a\sqrt{2(1 + \cos \theta)} d\theta = 2a \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta.$$

Для значений θ , содержащихся между $-\pi$ и π , $\cos \frac{\theta}{2}$ имеет положительное значение; интегрируя поэтому от $\theta = 0$, что соответствует верхней точке параболы V , до произвольного значения θ , получим для $s = \widehat{VP}$ выражение:

$$s = 4a \sin \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

В частности, при $\theta = \pi$ получим длину половины ветви параболы $\widehat{VB} = 4a$; длина полной ветви равна $8a$. Разность

$$y = 2a - \eta,$$

очевидно, выражает расстояние RH точки P от касательной к циклоиде в точке V . Вместе с тем, второе из уравнений (12) дает:

$$y = a(1 - \cos \theta) = 2a \sin^2 \frac{\theta}{2};$$

сопоставляя это с выражением (13), получаем замечательное соотношение:

$$s^2 = 8ay, \quad (14)$$

между длиной дуги и ординатой, к которому нам часто придется возвращаться.

с) *Построение центра кривизны.* Мы воспользуемся для этого теоремой Савари, сохраняя необходимые соглашения относительно обозначений, как мы уже это делали в рубр. 38. Так как мы рассматриваем здесь циклоиду, описываемую точкой P , то подвижной профиль с здесь сводится к этой точке, а сопряженный профиль именно и представляет собой циклоиду.

Вследствие этого PO изображает здесь прямую CC_r , а прямая IT'' представлена перпендикуляром к IP из точки I ; их пересечением (J в общем выражении теоремы в рубр. 35), таким образом, служит точка P' , диаметрально противоположная P на окружности l .

Центр кривизны Γ_λ базы теперь находится в бесконечности, в направлении, перпендикулярном к самой базе; поэтому прямая $J\Gamma_\lambda$ теперь перпендикулярна к базе в точке I'' . В силу геометрической теоремы Савари она пересекает прямую IP в искомом центре кривизны Γ .

Из этого построения следует, что треугольник $PP'I$ подобен треугольнику POI ; но отрезки OP и OP' равны между собою; вследствие этого равны также отрезки IP и II , определяемые на базе высотой этого треугольника PI ; поэтому Γ есть точка, противоположная P относительно I ; отсюда следует, что

$$P\Gamma = 2PI,$$

как мы это уже нашли выше из формулы Савари при помощи перехода к пределу.

Как непосредственно из чертежа, так и из определения параметра θ следует, что $\widehat{PIO} = \frac{\theta}{2}$ и, следовательно,

$$PI = 2a \cos \frac{\theta}{2};$$

вместе с тем мы получаем для радиуса кривизны циклоиды выражение:

$$r = 4a \cos \frac{\theta}{2},$$

которое, впрочем, можно было бы получить и формально непосредственно из параметрических уравнений (12).

д) *Эволюта циклоиды.* Чтобы определить геометрическое место центров кривизны Γ , удобно рассматривать помимо рулетты l также окружность l_1 , симметричную с l относительно точки I , а потому также касающуюся базы в точке I . Центр кривизны Γ лежит на этой последней окружности.

Обозначим через λ_1 прямую, параллельную базе и отстоящую от нее на расстоянии $2a$, а потому касающуюся окружности l_1 ; наконец, через A_1, Ω_1, I_1, B_1 обозначим проекции точек A, Ω, I, B на прямую λ_1 .

Дуга $I_1\Gamma$ окружности l_1 , очевидно, равна дуге $\widehat{WP}$ окружности l , которая, в свою очередь, равна отрезку $I\Omega$, а потому также отрезку $I_1\Omega_1$.

Равенство дуги $I_1\Gamma$ и отрезка $I_1\Omega_1$ показывает, что положение точки Γ , соответствующей произвольной точке P , а следовательно, и произвольному положению окружности l , есть та именно точка, которую мы получили бы, если бы Γ была неразрывно связана с окружностью l_1 , а эта последняя катилась бы без скольжения по прямой λ_1 ; при этом точка Γ находилась бы в Ω_1 , когда соприкосновение имело бы место в этой точке.

Отсюда следует, что эволютой циклоиды служит равная ей циклоида, база которой параллельна базе исходной циклоиды, но снижена на расстояние $2a$ (т. е. расположена не с той стороны первоначальной базы, с которой лежит исходная кривая, а с противоположной).

Далее, точка, описывающая вторую циклоиду, попадает на базу в точку Ω_1 (см. выше); она находится в A и соответственно в B , когда соприкосновение с прямой λ_1 имеет место в A_1 и B_1 .

Отсюда ясно, что циклоида, служащая эволютой, сдвинута по отношению к исходной на половину волны: ее угловые точки, как мы видим на рисунке, например Ω , соответствуют верхним точкам на гребне исходной кривой; напротив, верхние ее точки совпадают с угловыми точками (A, B) исходной циклоиды.

е) Установив все эти свойства эволюты, мы имеем возможность вновь получить на этот раз уже чисто геометрически соотношение (14). Для этого достаточно припомнить основное свойство эвольвенты (рубр. 41), согласно которому при любом положении точки Γ дуга $\widehat{B\Gamma}$ всегда равна отрезку GP касательной в точке Γ , содержащемуся между точкой Γ и самой эвольвентой. Равенство

$$\widehat{B\Gamma} = GP = 2\widehat{\Gamma I},$$

примененное к произвольной дуге $s = \widehat{VP}$ исходной циклоиды, показывает, что длина s превышает вдвое хорду PW . Отсюда, вследствие хорошо известной теоремы элементарной геометрии

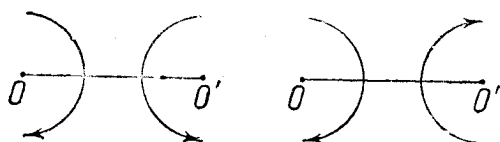
$$\overline{PW}^2 = IW \cdot PH = 2ay$$

непосредственно вытекает соотношение (14).

9. Относительное движение двух фигур, вращающихся вокруг различных точек.

44. В теории механизмов играет важную роль относительное движение двух фигур F и F' , свободно вращающихся вокруг неподвижных центров O и O' .

Обозначим через Δ расстояние OO' , через ω и ω' — абсолютные значения угловых скоростей; примем во внимание, что эти вращения в произвольно взятый момент могут оказаться:



Фиг. 69.

а) **противонаправленными**, т. е. происходящими в противоположные стороны относительно O и O' ;

б) **сонаправленными**, т. е. обращенными в одну и ту же сторону (фиг. 69).

Займемся относительным движением фигуры F'

по отношению к F , имея в виду главным образом сопоставление скоростей в один и тот же данный момент.

Если будем рассматривать произвольную точку P плоскости как принадлежащую фигуре F , то ее скорость v перпендикулярна к OP и имеет величину ωr , где r есть расстояние OP ; сторона, в которую скорость обращена, зависит от того, в какую сторону происходит самое вращение.

Совершенно так же, если рассматривать точку P как принадлежащую к фигуре F' , то она будет иметь скорость v' перпендикулярную к $O'P$; абсолютная величина (напряжение) этой

скорости равна $\omega' \rho'$, где $\rho' = O'R$. Относительная скорость той же точки, т. е. соответствующая движению фигуры F' относительно F , будет, таким образом, равна

$$v' - v.$$

Поэтому относительная скорость может обращаться в нуль только в том случае, когда направления скоростей v' и v совпадают, т. е. когда точка R принадлежит прямой OO' .

Мгновенный центр I движения фигуры F' относительно F нужно, следовательно, искать на линии центров.

Для определенности предположим, что мы здесь имеем дело со случаем а), т. е. с *противонаправленными вращениями*.

В этом случае, для каждой точки R , лежащей внутри отрезка OO' , скорости v и v' не только обе перпендикулярны к прямой OO' , но и обращены в одну и ту же сторону. Поэтому разность $v' - v$ может быть равна нулю только в том случае, если равны длины обоих векторов, т. е. если

$$\omega \rho = \omega' \rho',$$

где к тому же

$$\rho + \rho' = \Delta.$$

Таким образом мгновенный центр I определяется, как та точка отрезка OO' , которая его делит обратно пропорционально численным значениям угловых скоростей.

Переходя к случаю б), мы видим, что теперь точка I должна лежать вне отрезка OO' , и притом так, что отношение $\frac{IO}{IO'}$ должно быть равно $\frac{\omega'}{\omega}$. Точка I стремится поэтому удалиться в бесконечность, когда ω' и ω стремятся к совпадению.

К тому же выводу можно было прийти более кратким путем, замечая, что движение фигуры F' относительно F можно рассматривать как составленное из двух вращений вокруг O' и O . Основываясь на сложении вращательных движений вокруг параллельных осей (III, рубр. 27), мы найдем ось результирующего движения, а вместе с тем центр плоского движения.

45. Установив все это, возьмем произвольный промежуток времени, в течение которого точка I остается всегда на конечном расстоянии, и рассмотрим две полярные траектории, т. е. геометрическое место λ точки I относительно фигуры F и аналогичное геометрическое место l той же точки относительно F' ¹⁾.

Случай, когда ω и ω' имеют постоянные значения, и притом, в случае сонаправленных движений неравные между собой, исчерпывается непосредственно. В самом деле, из предыдущего вытекает, что точка I всегда остается на одном и том же расстоянии как от точки O , так и от точки O' ; *полярными траекто-*

1) Т. е. кривую λ , вычерчиваемую точкой I на фигуре F , и кривую l , вычерчиваемую той же точкой на фигуре F' . (Ред.)

рциями λ и l служат две окружности. Относительное движение является в этом случае *эпициклическим*; все выводы предыдущего параграфа, в частности и те, которые относятся к сопряженным профилям, находят себе здесь применение.

В исключенном выше случае сонаправленных и равных вращений (III, рубр. 27) относительное движение *оказалось бы* просто поступательным.

46. Перейдем к общему случаю **неравномерных вращений** и здесь ограничимся следующей проблемой: *задана кривая λ , требуется разыскать соответствующую кривую l .*

Предположим, что кривая λ определена своим уравнением в полярных координатах

$$\rho = f(\theta),$$

где ρ и θ отнесены к полюсу O и к полярной оси OA , неизменно связанной с фигурой F ; функция $f(\theta)$ остается совершенно произвольной.

Мы имеем в виду разыскать аналогичное уравнение кривой

$$\rho' = f'(\theta'),$$

отнесенной к полюсу O' и полярной оси $O'A'$, неразрывно связанной с фигурой F' .

Рассмотрим произвольную точку P кривой l и остановимся на том моменте t , в который эта точка, вследствие вращения фигуры F' вокруг O' , оказывается на прямой OO' ; она совпадает в этот момент с мгновенным центром I . Для определенности предположим, что точка I падает между O и O' ; тогда

$$\rho' = \Delta - \rho = \Delta - f(\theta). \quad (15)$$

Теперь, чтобы определить кривую l , остается установить зависимость между θ и θ' . Эту зависимость дает найденное нами уже кинематическое соотношение

$$\omega\rho = \omega'\rho'. \quad (16)$$

В бесконечно близкий момент $t + dt$ мгновенный центр I займет на кривой λ положение с аномалией $\theta + d\theta$, а на кривой l положение с аномалией $\theta' + d\theta'$. Элементарные вращения наших двух фигур соответственно вокруг O и O' по абсолютной своей величине, очевидно, составляют $|d\theta|$ и $|d\theta'|$; таким образом

$$\omega dt = |d\theta|, \quad \omega' dt = |d\theta'|.$$

Умножая равенство (16) на dt , мы в соответствии с этим получим:

$$\rho |d\theta| = \rho' |d\theta'|.$$

При предположении, сделанном относительно положения точки I , элементарные вращения должны быть **противонаправлены**; поэтому, если положительные аномалии отсчитываются вокруг O и O' в одну и ту же сторону, то $d\theta$ и $d\theta'$ имеют про-

тивоположные знаки; вследствие этого предыдущее соотношение получает более точное выражение:

$$\rho d\theta + \rho' d\theta' = 0. \quad (16')$$

Учитывая теперь уравнения кривой λ и соотношение (15), получаем:

$$d\theta' = \frac{f(\theta) d\theta}{f(\theta) - \Delta}. \quad (17)$$

Отсюда при помощи квадратуры получаем выражение аномалии θ' через θ . Исключая после этого θ из полученного выражения и уравнения (15), мы получим искомое полярное уравнение кривой λ .

47. В силу соотношений (15) и (16') функции $\rho(\theta)$ и $\rho'(\theta')$ связаны дифференциальным соотношением, которое очень полезно вывести; при его помощи можно вовсе избежать действительного интегрирования уравнения (17), так как результат становится и без того ясным.

С этой целью продифференцируем соотношение (15) по θ и затем разделим обе части равенства на ρ ; мы получим:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho'}{d\theta} = - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{d\theta}.$$

Подставляя в левой части вместо $\rho d\theta$ его значение, полученное из соотношения (16'), — мы представим этот результат в более симметричном виде:

$$\frac{d \log \rho'}{d\theta'} = \frac{d \log \rho}{d\theta}. \quad (18)$$

Отсюда непосредственно следует, что в том случае, когда λ есть логарифмическая спираль, то же имеет место относительно λ' и обратно; в самом деле, логарифмические спирали характеризуются свойством:

$$\frac{d \log \rho}{d\theta} = \text{const.}$$

В силу уравнения (18) отсюда следует, что постоянное значение сохраняет также производная $\frac{d \log \rho'}{d\theta'}$.

48. Установим теперь следующее общее предложение: *если известна одна пара полярных траекторий $\rho = f(\theta)$, $\rho' = f'(\theta')$, то из нее можно получить бесчисленное множество других пар, которые выражаются уравнениями $\rho = f(n\theta)$, $\rho' = f'(n\theta')$, где n есть произвольный постоянный множитель.*

Чтобы это доказать, заметим следующее: если в уравнения (15) и (17) подставим $f(n\theta)$ вместо $f(\theta)$ и в то же время по-

$$\theta_1 = n\theta, \quad \theta'_1 = n\theta',$$

то они примут вид:

$$\rho' = \Delta - f(\theta_1),$$

$$d\theta_1' = \frac{f'(\theta_1) d\theta_1}{f(\theta_1) - \Delta}.$$

Но это — те же уравнения (15) и (17), в которых только θ и θ' заменены через θ_1 и θ_1' . Им удовлетворяет, следовательно, пара кривых:

$$\rho = f(\theta_1)$$

и

$$\rho' = f'(\theta_1').$$

Подставляя сюда вместо θ_1 и θ_1' их значения, получим уравнения этих кривых в виде:

$$\rho = f(n\theta),$$

$$\rho' = f'(n\theta').$$

49. Закончим следующим примером. Примем за λ эллипс, имеющий фокус в точке O и большую ось, равную $\Delta = OO'$ (фиг. 70).

Как на основании общих формул (рубр. 46), так и при помощи прямых геометрических соображений можно найти, что кривая l представляет собою эллипс, равный λ , с фокусом в точке O' .

В самом деле, возьмем произвольное положение фигуры F и обозначим через I пересечение эллипса λ с отрезком OO' , пусть O_1 будет второй фокус эллипса λ .

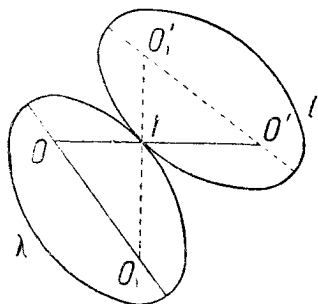
Соединим I с O_1 и продолжим IO_1 за точку I на расстоянии IO_1' , равное IO . Так как по условию большая ось эллипса λ имеет длину OO_1' , то в силу основного фокального свойства эллипса

$$IO + IO_1 = \Delta,$$

а потому IO_1 равно IO' . Из равенства треугольников IOO_1 и $IO'O_1'$ теперь следует, что $O'O_1' = OO_1$.

Установив это, представим себе, что фигура F' вращается вокруг O' ; определенный ее луч $O'O_1'$ в каждый момент занимает положение, которое в силу предыдущего построения однозначно определяется положением фигуры F при ее вращении вокруг O .

На этом луче точка O_1' всегда будет сохранять свое положение, так как расстояние $O'O_1'$ будет все время оставаться равным междуполюсному расстоянию Δ эллипса λ . Отсюда непосредственно вытекает, что геометрическое место точек I на фигуре F' есть эллипс l , равный λ . В самом деле, сумма расстояний точки I от двух точек O' и O_1' , неизменно связанных с F' , как раз равна Δ .



Фиг. 70.

10. Применения к зубчатым колесам.

50. В технике часто бывает необходимым преобразовать вращательное движение, происходящее вокруг одного вала, в аналогичное вращение вокруг параллельного вала. Это достигается посредством зацепления двух колес, насаженных на эти валы. Отвлекаясь от толщины колес, их можно представлять себе расположенными в одной и той же плоскости, перпендикулярной к валам.

Наиболее обычный случай, на котором мы здесь остановимся лишь вкратце, это тот, когда оба вращения происходят равномерно, так что *относительное движение обоих колес есть эпитрохическое* (рубр. 45).

Обе полярные траектории называются *основными окружностями*. Они представляли бы собой идеал сопряженных профилей (рубр. 23), если бы при их посредстве можно было на практике осуществить правильную передачу движения с одного колеса на другое.

В некоторых случаях такая возможность действительно существует. Когда механизм подвержен действию незначительных сил, то простой натуральной шероховатости соприкасающихся круговых профилей достаточно для передачи движения; когда одно колесо вращается, другие за ним следуют без скольжения; мы имеем тогда *колеса с трением*. Но когда сопротивление, как это имеет место в большинстве случаев, превышает определенный предел, уже нельзя рассчитывать на правильную передачу при простом соприкосновении. В этих случаях нужно заменить основные окружности волнистыми сопряженными профилями, которые способны своей материальной непроницаемостью гарантировать необходимую передачу движения. Это приводит, таким образом, к двум зубчатым колесам, которые совместно образуют *механизм зацепления*.

Такой механизм может быть *односторонним*, если одно из двух колес, например K , способно сообщить другому вращение только в одну определенную сторону. Зацепление называется *обратимым*, когда оно может функционировать в обе стороны, *взаимным*, когда колеса по своему назначению могут друг друга заменять (без обращения сторон соответствующих вращений).

Вообще, при установившемся режиме механизма одно из двух колес всегда является *движущим* или *ведущим*, а другое *ведомым*.

51. Что касается формы, которую следует дать профилям, то в этом отношении, прежде всего, нужно иметь в виду общее правило, что они должны возможно менее удаляться от полярных траекторий. По этой причине стараются дать колесам такую форму, чтобы наружная граница каждого колеса (как уже было указано выше, волнистая) частью была расположена вне основной окружности, частью же внутри ее. При этих условиях она удаляется от основной окружности меньше, чем это имело бы место, если бы она была целиком расположена вне этой окружности.

Волнообразные возвышения профиля, как правило, делаются равными между собой. Каждое из них, например, $ABCDE$ (фиг. 71) называется *зубом* или, правильнее, *профилем зуба*; самое же название *зуба* сохраняется за площадью, т. е. за выступающей частью колеса (на фиг. 71), которая содержится между профилем и окружностью, концентрической с основной окружностью и проходящей через точки $A, D, E...$ Пустоты между последовательными зубьями называются *просветами* (V на фиг. 71).

Наконец, часть основной окружности HH' , отделяемая зубом и следующим за ним просветом, называется *ходом* зубчатого колеса. Совершенно ясно, что два колеса, приспособленные к взаимному зацеплению, непременно должны иметь один и тот же ход. В самом деле, когда одно из двух колес повернется на угол, соответствующий ходу, то общее его геометрическое положение относительно линии центров OO' остается совершенно неизменным: каждый зуб замещается только последующим зубом. Когда механизм в ходу, то же должно иметь место и для второго колеса; таким образом по основным окружностям, служащим полярными траекториями, точка соприкосновения продвигается на равные дуги; отсюда мы и заключаем о равенстве хода одной и другой зубчатки.

52. Установив все это, обозначим через ρ и ρ' радиусы основных окружностей, через n — число зубьев, которыми снабжено колесо R , и через n' — число зубьев колеса R' .

По определению, ход колеса R равен $\frac{2\pi\rho}{n}$, а ход колеса R' равен $\frac{2\pi\rho'}{n'}$. Равенство хода выражается теперь законом пропорциональности:

$$\frac{n}{\rho} = \frac{n'}{\rho'}$$

между числами зубьев на каждом колесе и радиусами основных окружностей.

Другим основным законом является установленная уже в предыдущем параграфе обратная пропорциональность между радиусами ρ и ρ' и угловыми скоростями, с которыми вращаются колеса, т. е. соотношение:

$$\omega\rho = \omega'\rho';$$

перемножая последние два равенства почленно, получаем: $\omega n = \omega' n'$. Таким образом числа зубьев двух колес в зацеплении обратно пропорциональны угловым скоростям их вращения.

53. Во взаимных зацеплениях (рубр. 50) профиль $ABCDE$ зуба разделяется на четыре части, две из которых — боковые — расположены симметрично относительно среднего радиуса, а две другие — AD и CD — расположены продольно по отношению к основной окружности.

Когда передача движения происходит в определенную сторону, то одна из боковых дуг, например AB , играет ведущую роль; при обратном движении эта роль переходит к симметричной дуге CD . Две продольные дуги BC и DE не предназначены для соприкосновения с другим колесом; для них поэтому нет надобности рассматривать сопряженные профили. Выбор последних зависит от конструктивных особенностей аппарата в каждом частном случае. Отметим только, что для сохранения непрерывности в передаче движения профилю зубьев и интервалам DE следует дать такие размеры, чтобы по крайней мере один из зубьев в каждый момент находился в соприкосновении с сопряженным профилем. Следует даже принять за правило такое устройство механизма, чтобы в соприкосновении всегда находились два зуба с одной и с другой стороны, — не больше, иначе значительно возрастет трение (за счет энергии преобразуемого движения), — но и не меньше из предосторожности, чтобы движение не прерывалось в случае порчи какого-либо зуба.

54. Если радиус одного из двух колес рассматривается как известный, если известны также как угловая скорость ω этого колеса, так и угловая скорость ω' , с которой должно вращаться другое колесо, то радиус последнего ρ' определяется из соотношения $\omega\rho = \omega'\rho'$; определение сопряженного профиля для произвольной дуги AB выполняется автоматически по общей теории эпициклического движения.

Отметим еще соглашение, по которому на дуге AB отличают две части: *ребро зуба* $АН$, т. е. часть, находящуюся внутри основной окружности, и *головку зуба* $НВ$, лежащую вне этой окружности.

Рассмотрим несколько примеров, относящихся к внешним зацеплениям (основные окружности расположены одна вне другой).

а) Предположим, во-первых, что $АН$ есть дуга гипоциклоиды, а AB — прилегающая часть эпициклоиды; обе дуги имеют базой основную окружность. Из рубр. 40 непосредственно следует, что второе колесо также должно быть снабжено гипоциклическими ребрами и эпициклическими головками. Этот тип зацепления называется *эпициклическим*.

б) Если ребро $АН$ образует прямолинейный отрезок, то в сопряженный профиль все еще должна входить дуга эпициклоиды. Вместе с тем, эпициклическую головку $НВ$ можно выбрать так, чтобы сопряженная гипоциклоида обратилась в прямолинейный отрезок: для этого достаточно, чтобы примыкающая к $НВ$ рулетка имела радиус $\frac{\rho}{2}$, где ρ — радиус первой основ-

ной окружности колеса, о котором идет речь. Таким образом оба колеса имеют прямолинейные ребра и эпициклические го-ловки. Это так называемое зацепление с *прямолинейными ребрами*.

с) Более предпочтительным, по причинам, которые мы сейчас укажем, является так называемое зацепление с *эвольвентой*, в котором AB есть дуга эвольвенты окружности, концентрической с основной окружностью и расположенной внутри ее. Сопряженный профиль в этом случае (рубр. 41) не только относится к тому же типу, но даже подобен первому профилю; отношение подобия совпадает с отношением $\frac{r}{r'}$ радиусов колес.

55. На практике, очевидно, важно располагать *ассортиментом зубчатых колес*. Под этим разумеют совокупность таких колес, что любые два могут быть приведены в зацепление; в каждом ассортименте стараются располагать колесами с любым числом зубьев (конечно, в известных пределах); таким образом (рубр. 52) можно устанавливать, по крайней мере приблизительно (и, конечно, в известных пределах), любые отношения скоростей, которые могут оказаться нужными при действии механизма.

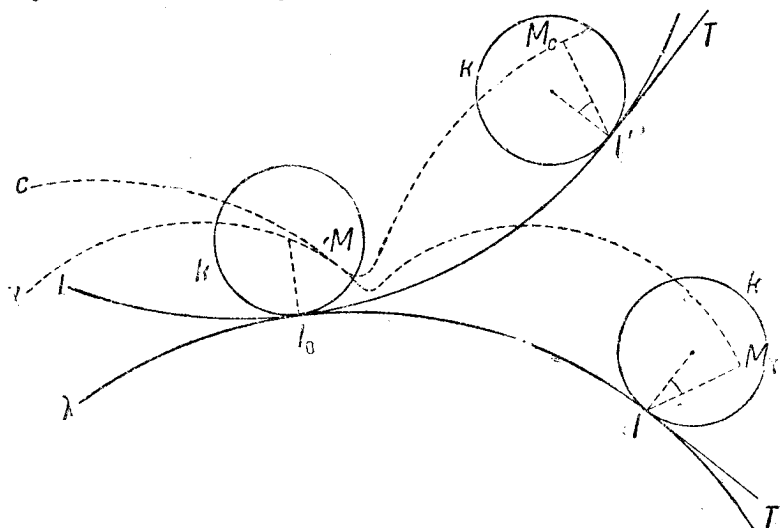
Легко отдать себе отчет, что как эпициклический тип, так и тип с эвольвентой пригодны для построения ассортиментов. Между тем типы с прямолинейным ребром для этой цели непригодны. Ассортименты с эвольвентой представляют с точки зрения технического изготовления большие преимущества потому, что в отличие от других они состоят из совершенно подобных зубчатых колес. Этим объясняется преимущественное применение в технике зацеплений с эвольвентами; они, впрочем, представляют еще и другое преимущество, на котором мы не будем останавливаться, чтобы не входить в технические детали. Систематическое изложение этого предмета можно найти в специальных трактатах ¹⁾.

56. Мы хотим присоединить еще только несколько соображений относительно так называемых *линий действия*. Под *линиями действия*, или *линиями соприкосновения* двух зубчатых колес, разумеют геометрическое место точек, в которых два зуба приходят друг с другом в соприкосновение; речь идет о геометрическом месте по отношению к неподвижному наблюдателю; по отношению же к каждому из колес это геометрическое место, очевидно, представляет просто профиль зубьев. Название линии действия обуславливается тем, что именно в точках этой кривой совершается передача действия с одного колеса на другое.

Неподвижного наблюдателя (в плоскости движения) мы можем схематизировать в мгновенном центре I перпендикуляром II' к линии центров OO' ; этот перпендикуляр совпадает с общей касательной в точке соприкосновения I основных окружностей

¹⁾ См., например, *D. Tessari, La costruzione deyli ingranaggi*, Torino 1902, а также главу „Кинематика в приложении к машинам“ в т. I сочинения *Lescurti, Cours de mécanique*, Paris 1914.

обоих колес. Теперь припомним, что произвольные два сопряженные профиля s и γ имеют точкой соприкосновения основание общей нормали, проведенной к ним из точки I ; тогда становится ясным, что определение линии действия может быть приведено к следующей геометрической проблеме: дан подвижной профиль s с определенным законом движения относительно IT ; разыскать геометрическое место оснований M нормалей, проведенных из точки I к последовательным положениям профиля. В интересующем нас случае речь идет о профиле произвольного зуба одного из двух колес, например K ; движение его



Фиг. 72.

связано с вращением колеса вокруг точки O . Принципиально это приводит, как видим, к задаче об огибающих, аналогичной той, которая встречается в определении сопряженных профилей (рубр. 7).

Однако в некоторых конкретных случаях можно, как и в случае сопряженных профилей, легче достигнуть цели при помощи эписикического метода. Некоторое очевидное расширение этого метода позволяет осуществить, как мы это сейчас покажем, непрерывное вычерчивание линии действия.

С этой целью возвратимся к рубр. 19 и предположим, что кривая k движется, постоянно проходя через точку I , и в этой точке постоянно касается неподвижной прямой IT (фиг. 72); вместе с этой кривой k движется неизменно связанная с нею точка M , которая образует сопряженные профили s и γ , когда кривая k катится по l и по λ . Траектория, которую в этих условиях описывает точка M , в среде, неизменно связанной с касательной IT , и есть линия действия в общем значении этого слова (применимом к любому плоскому движению, т. е. геометрическое место

точек касания двух сопряженных профилей относительно мгновенного центра I и общей касательной IT кривых l и λ ¹⁾).

Доказательство этого утверждения не сложно. При образовании кривых s и γ качением кривой k положения M_s и M_γ точки M , соответствующие произвольному соприкосновению кривых s и γ , сохраняют то же расположение относительно прямых IT и IT' (IT — касательная к кривой λ , IT' — к кривой l). С другой стороны, линия действия, по своему определению, есть отнесенное к IT геометрическое место точек M_s , в которых подвижный профиль s касается сопряженного профиля; оно совпадает с геометрическим местом точек M , соответствующих различным положениям кривой k относительно одной из ее касательных. Указанное движение кривой k , очевидно, и должно служить для реализации линии действия.

57. Примеры линий действия. В эпициклических зацеплениях зубья составлены из двух дуг: из гипоциклического ребра и эпициклической головки, та и другая имеют базой основную окружность. Кривой k , о которой шла речь в предыдущем параграфе, служит окружность, вообще различная для ребра и для головки; образующая же точка M в том и другом случаях занимает надлежащее место на кривой k . Поэтому линия действия (геометрическое место точки M , когда k скользит, касаясь неподвижной прямой в неподвижной точке) совпадает с самой кривой k , т. е. на практике с некоторой ее дугой, надлежащим образом ограниченной. При детальном анализе оказывается, что вся линия действия состоит из двух дуг тех самых окружностей, которые служат рулеттами для образования ребер и головок зуба. То же заключение остается в силе также для зацеплений с прямолинейными ребрами, потому что они входят в число рассмотренных зацеплений, как частные случаи (рубр. 54, б).

Менее просто складывается эпициклическое образование линии действия в случае зацеплений с эвольвентами (рубр. 54, с). Обратно, из определения соответственных профилей (рубр. 41) вытекает, что общей нормалью из мгновенного центра I служит неподвижная прямая (IMM' или INN' на фигуре, стр. 251). Линией действия, таким образом, служит прямолинейный отрезок.

11. Аналитическое исследование плоского твердого движения.

58. Общие результаты, которые мы установили в § 1 и 2 относительно плоского твердого движения синтетическим путем, могут быть выведены аналитически. Мы здесь займемся в дополнение к изложенному возможно кратким аналитическим выводом основных формул, чтобы воспользоваться ими для установления некоторых дальнейших свойств плоского движения.

¹⁾ Это значит, линией действия служит траектория, которую описывает точка M в плоскости, неразрывно связанной с касательной IT ; в этом смысле авторы употребляют термины „траектория относительно IT “ или „кривая, отнесенная к IT “. (Ред.)

Если неподвижная плоскость π и подвижная p отнесены к двум парам ортогональных сонаправленных (образующих по отношению к наблюдателю правосторонние пары) осей $\Omega\xi\eta$ и Oxy , а через θ обозначим аномалию ориентированной оси Ox относительно ориентированной же оси $\Omega\xi$, то уравнения движения точки P плоскости p имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \alpha + x \cos \theta - y \sin \theta, \\ \eta &= \beta + x \sin \theta + y \cos \theta; \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

здесь x, y обозначают постоянные координаты точки P в плоскости P , а α, β (координаты подвижного начала в плоскости π) и аномалия θ суть определенные функции времени. Эти уравнения можно вывести, либо применяя к этому случаю формулы (2) гл. III, либо интерпретируя формулы преобразования ортогональных декартовых координат в плоскости.

Дифференцируя соотношение (19) по времени t , мы получим компоненты скорости v точки P по неподвижным осям, именно:

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi} &= \dot{\alpha} - \dot{\theta} (x \sin \theta + y \cos \theta), \\ v_{\eta} &= \dot{\beta} + \dot{\theta} (x \cos \theta - y \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

На основании тех же уравнений (19) они могут быть представлены в виде:

$$\left. \begin{aligned} v_{\xi} &= \dot{\alpha} - \dot{\theta} (\eta - \beta), \\ v_{\eta} &= \dot{\beta} + \dot{\theta} (\xi - \alpha), \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

где $\dot{\alpha}, \dot{\beta}$ суть компоненты скорости v_0 подвижного начала O по неподвижным осям.

Если же теперь обратимся к подвижным осям, то компоненты v_x, v_y скорости v выразятся формулами:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{\xi} \cos \theta + v_{\eta} \sin \theta, \\ v_y &= -v_{\xi} \sin \theta + v_{\eta} \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

или же, в силу соотношений (20),

$$v_x = \dot{\alpha} \cos \theta + \dot{\beta} \sin \theta - y \dot{\theta}, \quad v_y = -\dot{\alpha} \sin \theta + \dot{\beta} \cos \theta + x \dot{\theta}.$$

С другой стороны, в силу тех же соотношений (22) выражения

$$\dot{\alpha} \cos \theta + \dot{\beta} \sin \theta \quad \text{и} \quad -\dot{\alpha} \sin \theta + \dot{\beta} \cos \theta$$

представляют компоненты $v_{0/x}, v_{0/y}$ скорости v_0 по подвижным осям; отсюда мы заключаем, что

$$\left. \begin{aligned} v_x &= v_{0/x} - y \dot{\theta}, \\ v_y &= v_{0/y} + x \dot{\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (21')$$

Из соотношений (21) и (21') непосредственно вытекают результаты рубр. 3. В самом деле, из формул (21) или (21') следует, что во всякий момент, в который угловая скорость $\dot{\theta}$ обращается в нуль, для любой точки P подвижной плоскости

$$v = v_0.$$

т. е. все точки плоскости p имеют равные скорости; состояние движения имеет поступательный характер. Напротив того, во всякий момент, в который $\dot{\theta}$ не равно нулю, существует одна и только одна точка, скорость которой равна нулю; это та точка I , координаты которой обращают в нуль обе компоненты вектора $\mathbf{v}$. Чтобы определить положение этой точки I на плоскости π , т. е. чтобы разыскать ее координаты ξ_0, η_0 мы имеем в соответствии с соотношением (21) уравнения:

$$\dot{\alpha} - \dot{\theta}(\eta_0 - \beta) = 0; \quad \dot{\beta} + \dot{\theta}(\xi_0 - \alpha) = 0,$$

и, таким образом,

$$\xi_0 = \alpha - \frac{\dot{\beta}}{\dot{\theta}}, \quad \eta_0 = \beta + \frac{\dot{\alpha}}{\dot{\theta}}. \quad (23)$$

Принимая во внимание твердость системы, мы отсюда непосредственно заключаем, что состояние движения в этот момент есть вращение вокруг точки I , т. е. I есть мгновенный центр движения. Координаты x_0, y_0 точки I на подвижной плоскости определяются аналогичным образом уравнениями (21'), если в них положим $v_x = v_y = 0$; это дает:

$$x_0 = -\frac{v_0' y}{\dot{\theta}}, \quad y_0 = \frac{v_0' x}{\dot{\theta}}. \quad (23')$$

Между значениями ξ_0, η_0 , определяемыми формулами (23), и x_0, y_0 , выражаемыми формулами (23'), имеют место соотношения (19); в этом можно убедиться, если принять во внимание выражение компонент $v_0' x, v_0' y$.

В те промежутки времени, в которые $\dot{\theta}$ остается отличным от нуля, уравнения (23) и (23') представляют собой параметрические выражения базы λ и рулетты l . Более того, поскольку параметром служит время, на них можно смотреть, как на уравнение движения полюса по этим кривым. Из этих уравнений можно было бы легко вывести результаты рубр. 23; но мы не будем здесь в это входить, а обратимся к полученным формулам, чтобы вывести из них некоторые дальнейшие свойства второго порядка.

59. Ускорение. Центр ускорений. Дифференцируя уравнение (21), мы получим следующие выражения для компонент a_ξ, a_η по неподвижным осям ускорения $\mathbf{a}$ произвольной точки P подвижной плоскости:

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\alpha} - \ddot{\theta}(\eta - \beta) - \dot{\theta}(v_\eta - \dot{\beta}), \\ a_\eta &= \ddot{\beta} + \ddot{\theta}(\xi - \alpha) + \dot{\theta}(v_\xi - \dot{\alpha}); \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

подставляя же сюда вместо $v_\xi - \dot{\alpha}, v_\eta - \dot{\beta}$ их выражения из уравнений (21), найдем:

$$\left. \begin{aligned} a_\xi &= \ddot{\alpha} - \ddot{\theta}(\eta - \beta) - \dot{\theta}^2(\xi - \alpha), \\ a_\eta &= \ddot{\beta} + \ddot{\theta}(\xi - \alpha) - \dot{\theta}^2(\eta - \beta). \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

Приравнивая правые части нулю, мы получим систему линейных уравнений относительно ξ , η , определитель которой равен $\ddot{\theta} + \theta^2$; если $\ddot{\theta}$ отлично от нуля, этот определитель также не равен нулю. Мы отсюда заключаем, что во всякий момент, в который состояние движения носит вращательный характер, существует одна и только одна точка, в которой ускорение обращается в нуль: она называется центром ускорений движущейся плоскости в рассматриваемый момент.

60. Чтобы вывести некоторые дальнейшие свойства распределения ускорений в произвольный момент t , в который $\ddot{\theta} \neq 0$, нужно целесообразно выбрать оси координат.

Положим, что в рассматриваемый момент t обе начальные точки Ω и O совпадают с мгновенным центром I , — более того, ось $\Omega\xi$ совпадает с общей касательной к двум полярным траекториям λ и l в точке I . При этих условиях в этот момент t , вследствие совпадения точек O и Ω , $\alpha = \beta = 0$; вследствие же совпадения точки Ω с I $\xi_0 = \eta_0 = 0$; поэтому уравнения (23) дают: $\dot{\alpha} = \dot{\beta} = 0$.

Воспользуемся теперь тем, что ось $\Omega\xi$ совпадает с общей касательной к кривым λ и l в точке I ; в этих условиях при элементарном движении от этого момента t до бесконечно близкого момента $t + dt$ полюс I смещается вдоль этой именно оси; поэтому в этот момент должно обращаться также в нуль элементарное наращение $d\eta_0$ координаты η_0 , а вместе с тем в момент t должна обращаться в нуль и производная $\dot{\eta}_0$. Если теперь продифференцируем второе из уравнений (23) по времени и отнесем его к тому же моменту t , то убедимся, что в этот момент также $\ddot{\alpha} = 0$. Из всего этого следует, что во всякий момент, в который скорость вращения отлична от нуля, ускорение полюса направлено по общей нормали к полярным траекториям.

Резюмируя, приходим к выводу, что при соглашениях, сделанных относительно выбора координат, в рассматриваемый момент t $\alpha = \beta = \dot{\alpha} = 0$. Вследствие этого в этот момент выражения (25) координат ускорения точки P , занимающей на неподвижной плоскости произвольное положение ξ , η , принимают вид:

$$a_{\xi} = -\ddot{\theta}\eta - \theta^2\xi, \quad a_{\eta} = \ddot{\theta}\xi - \theta^2\eta. \quad (25')$$

Но если точка P не совпадает с мгновенным полюсом, т. е. с точкой $\Omega \equiv O$, то прямая ΩP в момент t оказывается нормальной к своей траектории (рубр. 4); поэтому, чтобы получить нормальное и касательное ускорения в этот момент, достаточно будет определить компоненты ускорения a по направлению ΩP и направлению, перпендикулярному к ΩP ; таким образом, если через ρ обозначим радиус-вектор ΩP и попрежнему¹ ограничимся тем же моментом t , то получим:

$$a_n = a_{\xi} \frac{\xi}{\rho} + a_{\eta} \frac{\eta}{\rho}, \quad a_t = -a_{\xi} \frac{\eta}{\rho} + a_{\eta} \frac{\xi}{\rho},$$

или же, на основании уравнений (25) и соотношения $\xi^2 + \eta^2 = \rho^2$:

$$a_n = \frac{\ddot{\beta}\eta}{\rho} - \ddot{\theta}\rho, \quad a_t = \frac{\ddot{\beta}\xi}{\rho} + \ddot{\theta}\rho$$

Поэтому геометрическое место точек, в которых в момент t обращается в нуль нормальное или касательное ускорение на неподвижной плоскости, выражается соответственно первым или вторым из уравнений:

$$\ddot{\theta}^2 \rho^2 - \ddot{\beta}\eta = 0; \quad \ddot{\theta}\rho^2 + \ddot{\beta}\xi = 0, \quad (26)$$

которые выражают две окружности.

Первая из этих кривых (геометрическое место точек нулевого нормального ускорения) называется *окружностью перегибов*, так как она представляет собой также геометрическое место точек, в которых в этот момент соответствующая кривая имеет перегиб. В самом деле, мы знаем, что (II, рубр. 26) $a_n = v^2/r$, где r есть радиус кривизны траектории точки P ; так как при этом $v \neq 0$, ибо точка P , по предположению, не совпадает с полюсом I , то условие перегиба $\frac{1}{r} = 0$ может быть заменено положением $a_n = 0$.

Что касается второй окружности (26), т. е. геометрического места нулевого касательного ускорения, то ее можно назвать *окружностью стационарности*; она характеризуется тем обстоятельством, что производная напряжения скорости в каждой из ее точек обращается в нуль, а потому имеет стационарное значение в частности наибольшее или наименьшее).

Как окружность перегибов, так и окружность стационарности проходят через мгновенный центр Ω [это вытекает непосредственно из уравнения (26)], а также через центр ускорений (поскольку в нем обращается в нуль ускорение, а следовательно, и обе его компоненты). Из уравнения (26) следует еще, что окружность перегибов в точке Ω касается оси ξ , т. е. касается в мгновенном полюсе двух полярных траекторий; окружность же стационарности в точке Ω касается оси η , т. е. в полюсе пересекает ортогонально обе полярные траектории.

61. При предыдущих рассуждениях мы предположили, что точка P отлична от полюса.

Скажем теперь несколько слов о поведении по отношению к своей траектории той точки подвижной плоскости, которая в данный момент является полюсом вращения.

Для простоты предположим, что в этот момент окружность перегибов не сводится к одной точке; при таком ограничении легко убедиться, что полюс представляет собой угловую точку соответствующей траектории и что касательная в этой угловой точке совпадает с нормалью к базе λ .

Сохраним для этого сделанное уже предположение относительно осей $\Omega\xi\eta$ и развернем в ряд Тэйлора координаты ξ и η положения в момент $t + dt$ той точки, которая в момент t служила полюсом.

Очевидно, мы получим:

$$\xi = \mu, \quad \eta = \frac{dt^2}{2} \beta + \nu,$$

где μ и ν суть выражения третьего порядка относительно dt .

Но здесь не может быть $\dot{\beta} = 0$, ибо при $\dot{\beta} = 0$ окружность перигибов свелась бы к точке, что противно нашему предположению.

Так как, следовательно, $\dot{\beta} \neq 0$, то из предыдущих соотношений вытекает, что траектория точки I имеет в этой точке касательной прямую $\Omega\eta$; если мы поэтому дадим dt значения различных знаков, достаточно близкие к нулю, то ордината η не меняет знака; это и означает, что прямая $\Omega\eta$ есть касательная в угловой точке.

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Платформа движется на катках. Если груз, а следовательно, и трение достаточно велики, то образуется чистое качение платформы по каткам и катков по земле. Показать, что продвижение платформы превышает вдвое продвижение катков (точнее, оси каждого катка).

2. Ознакомиться в сочинении Лекорню, указанном на стр. 264, с отделом о классификации и исследовании механизмов.

3. Возвращаясь к упражнению 2 гл. IV, показать, что гелиоцентрическое движение луны представляет собой эпициклическое движение, для которого солнце служит центром неподвижной окружности, а земля — центром подвижной окружности; геоцентрическое движение другой планеты также есть эпициклическое или гипоциклическое в зависимости от того, будет ли это планета внутренняя или внешняя ¹⁾. В том и другом случаях центром неподвижной окружности служит земля, а центром подвижной — солнце.

4. Показать, что в эпициклическом движении (в узком значении этого слова), в котором радиусы обоих кругов имеют одну и ту же длину R , траектории точек подвижной окружности выражаются уравнением $\rho = 2R(1 + \cos \theta)$, т. е. представляют собой кардионды (частный случай паскалевых улиток).

5. Рассмотрим плоское твердое движение, определяемое отрезком, концы которого A и B описывают равные окружности.

Предположим, что расстояние между центрами O и O' двух окружностей равняется движущемуся отрезку AB . Если в начальный момент отрезок AB параллелен OO' , то движение сводится к параллельному перенесению (поступательное движение). Если же этот частный случай исключим, то полярными траекториями служат две равные гиперболы, расположенные во всякий момент симметрично относительно общей касательной в мгновенном центре вращения.

Неподвижная гипербола λ имеет фокусами точки O и O' ; подвижная гипербола ι имеет фокусами точки A и B .

6. Во всяком плоском твердом движении ускорения точек P , одинаково удаленных от центра ускорений A , наклонены к прямой AP под одним и тем же углом и имеют одинаковые абсолютные величины.

7. Если угловая скорость $\dot{\theta}$ твердого плоского движения имеет постоянное значение, то окружности с центром A , рассмотренные в предыдущем упражнении, вырождаются в прямые; ускорения движущихся точек направлены к центру ускорения.

8. Рассмотрим произвольное твердое плоское движение и остановимся на некотором моменте t . Если мы как-либо изменим закон движения (в его зависимости от времени) до или после рассматриваемого момента, то положение центра ускорений A изменится, мгновенный же центр I и окружность перигибов останутся те же.

¹⁾ Планета называется *внутренней* или *внешней* относительно земли в зависимости от того, является ли ее орбита внутренней или внешней по отношению к орбите земли. Внутренними планетами являются Меркурий и Венера; все остальные планеты, известные по настоящее время, суть *внешние*.