ГЛАВА II

Кинематика точки.

1. Предварительные соображения.

1. Теоретическая механика есть наука *о движении.*

Каждое явление движения протекает в *пространстве* и во *времени.* Поэтому механика предполагает в качестве необходимой предпосылки геометрию; к основным понятиям последней она присоединяет в качестве своего первого основного понятия *время.*

На первой стадии своих исследований теоретическая механика изучает, каким образом в ходе движения изменяются *с течением времени* геометрические признаки фигур или систем точек. Эти системы рассматриваются то как твердые (неизменяемые), то как деформирующиеся (изменяемые), в зависимости от различных возможных предположений, к которым приводит наблюдение тел в природе. Та часть механики, которая занимается исключительно этого рода вопросами, называется *кинематикой.*

Однако в этом отделе, имеющем чисто описательный характер, мы отвлекаемся от всех физических явлений, которые в действительности сопутствуют движению, а также от всех тех агентов, которым мы приписываем роль причин, вызывающих движение или видоизменяющих его (например, мускульные усилия, вес, трение и т. п.).

Изучением движения в его действительной связи со всеми этими агентами занимается механика в собственном смысле этого слова или *динамика*, в которую, в качестве составной части, входит *статика*, изучающая те условия, при которых данные материальные системы могут оставаться в покое.

Можно уже тут же указать, что в той же мере как кинематика отличается от геометрии приобщением к основным ее понятиям нового понятия — времени, так динамика основывается и развивается помимо кинематических элементов на основных понятиях о *силе* и *массе.*

Настоящий том будет главным образом (гл. II — VI) посвящен кинематике. При этом ввиду сложности общей проблемы мы, как это всегда делается при математическом анализе всякого рода конкретных вопросов, начнем с изучения наиболее простого случая, а именно с изучения движения одной только точки.

Заметим при этом, что рассмотрение этого абстрактного частного случая не только представляет собою с теоретической точки зрения первый шаг на пути изучения кинематики, но и само по себе находит приложение во многих конкретных проблемах. Это имеет место во всех тех часто представляющихся случаях, когда для определения положения тела достаточно ограничиться одной его точкой. Так, например, во многих вопросах астрономии небесные тела можно уподобить движущимся точкам; в баллистике очень часто достаточно знать траекторию одной только точки снаряда; положение судна на море определяется географическими координатами какой-либо его точки и т. д. В каждом из этих случаев расстояния между различными точками движущегося тела являются ничтожными в сравнении с размерами области, в которой протекают явления движения.

2. Здесь целесообразно сейчас же отчетливо отметить общее соотношение, столь же очевидное, как и важное.

Понятие о движении, как и о покое, по самой природе своей является *относительным*; точнее, это значит, что всякое утверждение, коим некоторому данному телу C приписывается состояние движения или покоя, имеет смысл только в той мере, в какой тело C подразумевается отнесенным к некоторому другому телу C_1 и констатируется, что положение тела C относительно C_1 с течением времени меняется или же остается неизменным.

Вследствие этого при каждом соображении, относящемся к кинематике (или даже к механике вообще), необходимо установить, каков тот *объект, к которому мы относим кинематическое состояние тела*; и если часто мы говорим о движении или покое без спецификации этого объекта, то это является законным исключительно в тех случаях, когда указывать этот объект является излишним, так как это совершенно ясно. Так, например, если мы говорим о падении тяжелого тела или о движении повозки или судна, то мы всегда молчаливо подразумеваем, что движение относится к земле; если речь идет о движении шатуна локомотива, то мы относим его движение к корпусу паровоза и т. п.

При аналитическом изображении явлений движения обыкновенно принимается, что объектом, к которому отнесено движение, служит триэдр осей декартовых координат.

3. Мы уже упомянули, что в кинематике время рассматривается как понятие первичное. Отнюдь не вступая поэтому на путь философского анализа этого понятия, мы ограничимся только замечанием, что для *измерения времени* сама природа так сказать, установила определенные единицы: сутки, месяц, год. Экспериментальное установление такой единицы по лунным или солнечным триадам, содержащим точно определенное число суток, месяцев и лет, составляло в течение многих веков главную, если не почти единственную, задачу астрономии. В настоящее время часы, благодаря современному усовершенствованию их устройства, представляют собой инструмент, на практике

достаточно точный для измерения времени принятой универсальной единицей — секундой среднего солнечного времени. Установив некоторый строго определенный момент, который принимается за *начало отсчета времени* $t = 0$, всякий другой момент однозначно определяют соответствующей *временной абсциссой* t, т. е. числом секунд, протекших между началом отсчета и рассматриваемым моментом; этому числу присваивается еще знак $+$ или $-$, смотря по тому, следует ли рассматриваемый момент времени за начальным моментом или предшествует ему.

Все это справедливо, если принять традиционную схему кинематики, которой мы и будем исключительно придерживаться. Следует, однако, отметить, что первое и основное расхождение между классической схемой и новейшей *теорией относительности* касается именно времени и того способа, которым сравниваются результаты измерения времени, полученные различными наблюдателями. Теория относительности внесла мощную обновляющую струю в механику и физику, хотя в большинстве случаев (и, в частности, во всех явлениях, которыми интересуется техника) разница в количественных оценках, произведенных на основе старой или новой теории, настолько мала, что ею можно пренебречь.

Теория относительности не постулирует, как это делает классическая схема, никакой универсальной меры времени и не приписывает результату измерения переменной t одно и то же значение для любого наблюдателя. Она прибегает к конкретному исследованию, чтобы выяснить, возможно ли и, если возможно, то в каких пределах, согласовать результаты измерения времени $t, t', \ldots$, полученные различными наблюдателями $O, O', \ldots$ При этом теория относительности предполагает, что эти наблюдатели пытаются добиться такого согласования путем обмена оптическими сигналами.

Опираясь на эту физическую основу, теория относительности приходит к необходимости заменить абстрактную концепцию абсолютного времени концепцией местных времен $t, t', \ldots$ (собственных времен отдельных исследователей $O, O', \ldots$). Для наблюдателей, движущихся друг относительно друга, их собственные времена оказываются связанными соотношениями, менее простыми, чем простое тождество (или перемена начала $t = t' + \text{const.} = \ldots$).

2. Аналитические средства для определения движения точки.

4. Рассмотрим некоторую точку P, находящуюся в движении по отношению к определенному триэдру ортогональных декартовых координат, который, как уже было указано в предыдущей главе, мы будем всегда считать *правосторонним*. В каждый момент интервала времени от t_0 до t_1, в течение которого точка P находилась в движении относительно нашего триэдра $Oxyz$, она занимала относительно него определенное положение;

вследствие этого точка P определена в этом интервале как переменная точка, представляющая собою однозначную функцию времени:

$$P = P(t) \text{ [1]}. \tag{1}$$

Это единственное геометрическое уравнение равносильно трем скалярным уравнениям:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t), \tag{2}$$

где x, y, z суть координаты точки P по отношению к установленному триэдру осей. Правые части этих уравнений представляют собой три скалярные функции времени, определенные в интервале от t_0 до t_1. В соответствии с этим характером определения функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ мы будем считать их однозначными, конечными, непрерывными во всем интервале от t_0 до t_1 (диференцируемыми, по крайней мере, дважды) [2].

Уравнение (1) или заменяющие его скалярные уравнения (2) называются уравнениями движения точки P.

5. Геометрическое место точек, которые движущаяся точка P занимает во время движения, представляет собою дугу кривой, называемой *траекторией* движущейся точки (за данный промежуток времени). На уравнения (2) можно смотреть как на параметрические уравнения траектории; исключая из них t, мы получим обычные декартовы ее уравнения.

Если траектория представляет собой дугу плоской кривой или отрезок прямой линии, то самое движение называют соответственно *плоским* или *прямолинейным*.

В то время как точка P движется по своей траектории, как это выражается уравнениями (2), проекции этой точки на оси координат, в свою очередь, совершают движение каждая по своей оси. Каждое из уравнений (2) выражает прямолинейное движение одной из этих проекций — соответственно P_x, P_y, P_z. Обратно, если заданы совершенно произвольно движения трех точек P_x, P_y, P_z, происходящие в один и тот же промежуток времени по осям координат, то этим определяется движение в пространстве некоторой точки P, которая в каждый момент имеет своими проекциями на оси координат точки P_x, P_y, P_z. Относительно движения точки P говорят, что оно *составлено* из прямолинейных движений точек P_x, P_y, P_z (*составляющие движения*); и поскольку оси координат представляют собой произвольные попарно перпендикулярные прямые, выходящие из произвольной же точки пространства, то всякое движение точки может быть *разложено* на три составляющих прямолинейных движения, по любым трем осям, образующим ортогональную связку.

---

[1]) Как мы знаем (рубр. 71), это эквивалентно тому, что радиус-вектор точки представляет собою функцию времени $\overline{OP} = \overline{OP}(t)$. (*Ред.*)

[2]) Только в теории ударов приходится иметь дело со схемой отображения явлений движения, которые предполагают разрыв первых производных функций (2)

Совершенно аналогично этому, когда точка P движется в пространстве, ее проекция P_1 на плоскость $z=0$ совершает в результате этого плоское движение, которое выражается первыми двумя уравнениями системы (2), т. е.

$$x = x(t), \quad y = y(t).$$

Движение точки P, обратно, вполне определяется плоским движением точки P_1 по плоскости $z=0$ и одновременным движением точки P_z по прямой, перпендикулярной к этой плоскости. При этих условиях говорят, что движение точки P *составлено* из плоского движения точки P_1 и перпендикулярного к этой плоскости прямолинейного движения точки P_z. И поскольку плоскость $z=0$ и ось z, по существу, представляют собою произвольную плоскость и перпендикулярную к ней прямую, мы видим, что движение точки в пространстве всегда можно *разложить* на плоское движение, происходящее в любой плоскости, и перпендикулярное к нему прямолинейное движение.

6. Пусть t и $t+\Delta t$ будут два произвольные момента в интервале, в котором происходит движение точки P; положения $P(t)$ и $P(t+\Delta t)$, которые в эти моменты занимает точка P, определяют вектор (I, рубр. 71) ΔP:

$$P(t+\Delta t) - P(t) = \overline{OP}(t+\Delta t) - \overline{OP}(t),$$

где O — произвольная зафиксированная точка пространства; компоненты вектора ΔP имеют значения:

$$x(t+\Delta t) - x(t), \quad y(t+\Delta t) - y(t), \quad z(t+\Delta t) - z(t);$$

этот вектор называется *смещением* точки P за промежуток времени Δt, начиная с момента t. В частности, для бесконечно малого $\Delta t = dt$ вектор

$$P(t+dt) - P(t)$$

представляет собою *элементарное смещение*, отнесенное к моменту t, и, по крайней мере, до бесконечно-малых высших порядков выражается диференциалом переменной точки dP (I, рубр. 79); это элементарное смещение есть бесконечно малый вектор, имеющий компонентами

$$dx = \dot{x}\,dt, \quad dy = \dot{y}\,dt, \quad dz = \dot{z}\,dt,$$

где $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ суть производные от x, y, z по t [1]). Этот вектор dP направлен по касательной к траектории в сторону движения и имеет абсолютное значение:

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt, \tag{3}$$

где радикал взят в арифметическом своем значении.

---

[1]) В дальнейшем символами, выражающими точку, вектор или скаляр, зависящие от времени, с точкою наверху мы будем обозначать исключительно их производные *по времени*.

Если на траектории установим систему криволинейных абсцисс s, приняв за начало отсчета произвольную точку — начальное положение точки P, соответствующее, скажем, моменту t_0, — а за положительную сторону ту, которая обращена от точки $P(t_0)$ к точке $P(t_1)$, то арифметическое значение радикала (3) даст абсолютное значение $|ds|$ *элемента пути* ds, пройденного движущейся точкой P в *элемент времени* dt, начинающийся в момент t. В точности же

$$ds = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt, \tag{4}$$

где верхний знак $+$ должен быть взят в том случае, когда точка P в рассматриваемый элемент времени dt движется в сторону возрастающих значений s, а нижний — при движении в противоположную сторону.

Суммируя абсолютные значения последовательных элементов пути (3), пройденных точкой P от момента t_0 до произвольного момента t_1, т. е. вычисляя интеграл:

$$\int_{t_0}^{t}\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t}\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt,$$

мы получим *весь путь*, пройденный точкой по своей траектории в установленный промежуток времени; при этом, следовательно, значение каждого элемента пути взято с положительным знаком, независимо от того, в какую сторону в этот элемент времени происходило движение.

Напротив, если каждому элементу (4) мы припишем соответствующий ему знак, то интеграл

$$\int_{t_0}^{t} ds = \int_{t_0}^{t}\pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \int_{t_0}^{t}\pm\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\,dt$$

даст для любого момента t, падающего в интервал движения, соответствующую ему криволинейную абсциссу, определяющую положение точки P на траектории в момент t. Этот последний интеграл представляет собою вполне определенную функцию времени $s(t)$; в условиях, установленных для функций (2), это будет также конечная и однозначная функция, допускающая производные, по крайней мере, до второго порядка включительно. Уравнение

$$s = s(t) \tag{5}$$

называется в этом случае *путевым уравнением движения* [1]). Плоская кривая, которая выражается уравнением (2) в декартовых

---

[1]) Авторы употребляют термин „equazione oraria" — „часовое уравнение". Смысл его заключается в том, что уравнение (5) по показанию часов t определяет s, а вместе с тем и положение точки на траектории. Но по показанию часов t положение точки определяется и уравнениями (2). Существенным здесь является то, что одно скалярное уравнение (5) определяет положение точки, если известен описываемый ею *путь*, траектория движения. (*Ред.*)

координатах (ортогональных), если за абсциссу принимается время t, а за ординату s, называется *путевой диаграммой* движения [1]).

7. Из предыдущего, таким образом, ясно, что движение точки P вполне определяется как уравнениями движения (2), так и любым геометрическим заданием траектории (например, при помощи двух уравнений, связывающих x, y, z, или трех параметрических уравнений при совершенно произвольном параметре) совместно с путевым уравнением (5).

В более общем виде движение точки P может быть определено тем, что ее положение задается в функции каких угодно параметров $q_1, q_2, \ldots, q_n$:

$$P = P(q_1, q_2, q_3, \ldots, q_n), \tag{6}$$

где $q_1, q_2, \ldots, q_n$, в свою очередь, представляют собою заданные функции времени:

$$q_i = q_i(t) \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n). \tag{7}$$

В самом деле, достаточно, очевидно, подставить функции (7) в правую часть уравнения (6), чтобы привести его к виду (1). В этих случаях уравнения (7) также называются уравнениями движения [2]).

3. Скорость.

8. **Равномерное движение по любой траектории. Скорость.** Чтобы дать математически точное выражение нашему представлению о различной быстроте, с которой может протекать движение во времени, мы поставим себя сначала в наиболее простые условия. С этой целью предположим, что нам задана траектория движущейся точки, которой может служить какая угодно кривая l; тогда для определения движения, как нам известно, достаточно располагать *путевым уравнением*:

$$s = s(t).$$

В первую очередь, имея в виду наиболее простой тип движений, обычно происходящих перед нашими глазами (видимое движение солнца, поезда, часовых стрелок и т. п.), мы предположим, что расстояние s, пройденное точкой P, начиная от некоторого ее положения $P(t_0)$, принятого за начало расстояний, изменяется пропорционально промежутку времени $t-t_0$, в течение которого оно пройдено движущимся телом, это значит:

$$\frac{s}{t-t_0} = \text{const}.$$

---

[1]) Авторы и в этом случае употребляют термин „diagramma orario“ — „часовая диаграмма“. Термином „путевая диаграмма“ или „путевой график“ обычно пользуются в железнодорожной практике.

[2]) Если, например, точка P движется по заданной сфере, то удобно определять ее положение долготой (q_1) и широтой (q_2). Движение будет известно, если q_1 и q_2 будут заданы в функции времени t. (*Ред.*)

Если обозначим эту постоянную через v, то путевое уравнение примет вид:

$$s = v(t - t_0), \tag{8}$$

т. е. пройденное расстояние представляет *линейную функцию времени*. И, обратно, всякое путевое уравнение, линейное относительно времени, очевидно, может быть представлено в виде (8).

Всякое движение описанного типа, путевое уравнение которого является линейным относительно времени, называется *равномерным*.

Опираясь на соотношение (8), фиксируем два произвольные момента t и $t + \Delta t$; расстояние Δs, пройденное точкой P в определенный таким образом промежуток времени Δt, согласно уравнению (8), выражается формулой:

$$\Delta s = v(t + \Delta t - t_0) - v(t - t_0) = v\,\Delta t,$$

откуда

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = v; \tag{9}$$

это значит: *для какого угодно промежутка времени Δt, начинающегося в какой угодно момент, отношение пройденного за этот промежуток расстояния к продолжительности самого промежутка времени имеет постоянное значение v.*

Полагая, в частности, в соотношении (9) $\Delta t = 1$, мы видим, что v есть длина пути, пройденного точкой P в *единицу времени*. Это число v называется *скоростью рассматриваемого равномерного движения*. Скорость представляет собою, таким образом, физическую (или точнее кинематическую) величину нового типа, которая определяется как отношение некоторой *длины* к некоторому *промежутку времени*; если за единицу длины выбран метр, а за единицу времени секунда, то мы можем принять за единицу скорости *метр в секунду*, т. е. скорость такого равномерного движения, при котором движущаяся точка в каждую секунду проходит по своей траектории метр пути.

Небесполезно будет показать, что только что данное определение скорости равномерного движения находится в полном согласии с тем значением быстроты движения, которое мы с этим понятием соединяем в обычной речи; в самом деле, если две точки P_1 и P_2 движутся равномерно со скоростями v_1 и v_2, то в *один и тот же промежуток времени* Δt они, согласно формуле (9), пробегают расстояния:

$$\Delta s_1 = v_1 \Delta t \quad \text{и} \quad \Delta s_2 = v_2 \Delta t,$$

и мы будем иметь:

$$\Delta s_1 > \Delta s_2, \; \Delta s_1 = \Delta s_2 \quad \text{или} \quad \Delta s_1 < \Delta s_2,$$

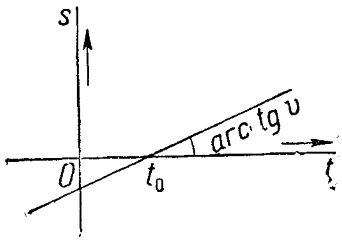
смотря по тому, будет ли

$$v_1 > v_2, \; v_1 = v_2 \quad \text{или} \quad v_1 < v_2.$$

9. До сих пор мы не делали никаких предположений относительно знака числа v. Между тем соотношение

$$\Delta s = v\,\Delta t,$$

в котором предполагается $\Delta t > 0$ (т. е. промежуток Δt рассматривается в его естественной последовательности по течению времени), показывает, что Δs имеет тот же знак, что и v. Это означает, что за рассматриваемый промежуток времени точка движется в сторону, принятую при отсчете криволинейных абсцисс за положительную, или в противоположную, в зависимости от того, имеет ли v положительное или отрицательное значение. В соответствии с этим движение называется *прогрессивным* или *регрессивным*. Таким образом скорость v, взятая со своим знаком, дает не только меру быстроты движения, но и сторону, в которую оно обращено. Полезно, однако, предупредить, что, по большей части, говоря о скорости равномерного движения, имеют в виду не столько скорость, как она выше определена, сколько ее абсолютное значение.



Фиг. 31.

10. Путевая диаграмма равномерного движения, выражаемая уравнением:

$$s = v\,(t - t_0),$$

представляет собою прямую, которая пересекает ось времени в точке $t = t_0$ (абсцисса начального момента) и имеет угловым коэфициентом скорость v (фиг. 31).

Диаграммы (прямолинейные) равномерных движений, нанесенные на миллиметровую бумагу, дают удобное средство для графического решения задач о скрещивании, настигании и тому подобных явлениях нескольких точек, равномерно двигающихся по одной и той же траектории (экипажи по одной и той же дороге, поезда по тем же или параллельным рельсам). В частности, очень полезное применение эти диаграммы получают в так называемых железнодорожных графиках.

11. Скалярная скорость какого угодно движения. Перейдем теперь к случаю, когда на любой заданной траектории определено движение своим путевым уравнением:

$$s = s\,(t),$$

где $s\,(t)$ — какая угодно функция от t. Здесь вновь выберем промежуток времени Δt от t до $t + \Delta t$ и определим расстояние, пройденное точкой P за этот промежуток:

$$\Delta s = s\,(t + \Delta t) - s\,(t);$$

отношение

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s\,(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} \tag{10}$$

[отношение наращения функции $s(t)$ к наращению независимой переменной, начиная со значения t последней] называется *средней скоростью* движущейся точки *за промежуток времени от t до $t+\Delta t$*. Теперь заметим, что отношение (10) можно интерпретировать как (постоянную) скорость фиктивной точки P', которая равномерным движением описывает ту же кривую l, что и точка P таким образом, что она в моменты t и $t+\Delta t$ занимает те же положения на траектории, что и точка P. В течение самого промежутка Δt движение точки P может многообразно отличаться от движения фиктивной точки P' (она может сначала отставать от нее, затем догнать ее в определенный момент и т. п.). Но если вместо первоначально взятого интервала Δt мы возьмем меньший промежуток, начинающийся, однако, с того же момента t, и для него вновь вообразим фиктивную точку P', движущуюся равномерно и совпадающую с P в начальный и конечный моменты интервала, то ясно, что эти два движения (истинное и фиктивное) уже будут друг от друга отличаться меньше, чем в предыдущем случае, и вообще тем меньше, чем меньше самый интервал Δt. Если мы поэтому будем представлять себе, что интервал Δt, последовательно уменьшаясь, стремится к нулю, то мы, естественно, придем к следующему определению:

Скоростью точки, движущейся по некоторой траектории по путевому уравнению $s=s(t)$ в произвольный момент t, называется предел

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t},$$

т. е. *значение производной $\dot{s}(t)$ от функции $s(t)$ в момент t* (каковая, согласно сделанным предположениям, непременно существует).

Если предыдущее определение применим к равномерному движению, т. е. к движению, имеющему путевое уравнение (8), то мы получим ту же постоянную v, которую мы уже назвали для этого случая скоростью движения.

Обратно, если движение имеет постоянную скорость v, то, интегрируя уравнение

$$\frac{ds}{dt}=v,$$

мы получим:

$$s=vt+\text{const.},$$

т. е. это движение равномерное. Мы отсюда заключаем, что *равномерные движения характеризуются постоянством скорости каждого из них.*

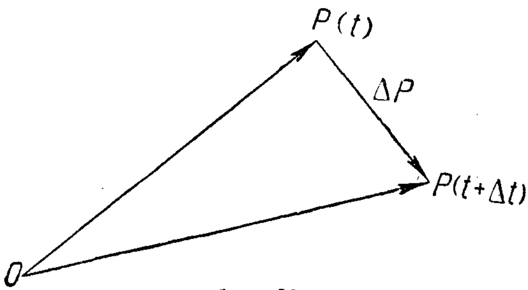
В заключение полезно будет уже здесь отметить, что скорость, таким образом определенную, называют, правильнее, *скалярной скоростью* в отличие от векторной скорости, о которой будет речь впереди.

12. В силу известной геометрической интерпретации производной скорость в момент t представлена на диаграмме движения угловым коэфициентом касательной в точке, соответствующей абсциссе t. В зависимости от того, имеет ли производная $\dot{s}(t)$, т. е. скорость движения, в момент t положительное или отрицательное значение, функция $s(t)$ вблизи t возрастает или убывает; иначе говоря, в каждом достаточно малом интервале, который следует за моментом t или предшествует ему, движение является соответственно *прогрессивным* или *ретроградным*.

Если, далее, $\dot{s}(t)=0$, то в этот момент движущееся тело находится в *состоянии остановки*; на диаграмме этот момент изображается точкой, в которой касательная параллельна оси абсцисс; но в такой момент непосредственно не ясно, в какую сторону обращено движение; это требует более тщательного исследования. Как известно из анализа, чтобы в этом случае установить характер изменения функции $s(t)$, необходимо обратиться к дальнейшим производным; первая из них, которая не обращается в нуль, дает требуемое указание. Так, например, если остановимся на наиболее обычном случае, когда $\ddot{s}(t)$ не обращается в нуль, то можно утверждать, что $s(t)$ имеет в этот момент t максимум при $\ddot{s}(t)<0$ и минимум при $\ddot{s}(t)>0$; с точки зрения кинематической, это означает, что в момент t сторона, в которую обращено движение, меняется; и именно, при $\ddot{s}(t)<0$ движение, прогрессивное до момента t (вблизи него), становится регрессивным после него; при $\ddot{s}(t)>0$ происходит противоположное обращение.

Наконец, прибавим еще, что движение называется в момент t (или в промежуток от t до $t+\Delta t$) *ускоренным или замедленным, смотря по тому, имеют ли эти производные общий знак или противоположные знаки.*

13. Векторная скорость. До сих пор мы вычисляли скорость движения, принимая во внимание только пути, проходимые точкой *по траектории*. При этом мы совершенно не учитывали смещения точки P в пространстве; в самом деле, выражение $\dot{s}(t)$, принятое нами за (скалярную) скорость движения, вовсе не изменилось бы, если бы мы изменили траекторию (скажем, изогнули бы ее в пространстве без растяжения), но сохранили бы то же путевое уравнение, т. е. тот же закон движения точки по траектории. Между тем, для нас важно установить способ измерения скорости, который характеризовал бы также смещение точки в пространстве.



Фиг. 32.

Возвратимся для этого к уравнению движения точки P:

$$P = P(t)$$

или в декартовых координатах, отнесенных к триэдру $Oxyz$:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t).$$

Рассмотрим теперь смещение ΔP, которое претерпевает точка P в произвольный промежуток времени Δt от момента t до момента $t + \Delta t$ (фиг. 32); вектор

$$\Delta P = P(t + \Delta t) - P(t),$$

очевидно, представляет собою это смещение, соответствующее скалярному значению Δt нашего интервала. При этих условиях вектор

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t},$$

приложенный в точке $P(t)$ и имеющий прямой действия прямую $P(t)P(t + \Delta t)$, а своими скалярными компонентами

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},\quad \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t},\quad \frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t},$$

называется *средней векторной скоростью* за рассматриваемый промежуток времени.

Если теперь, сохраняя момент t, будем уменьшать интервал Δt, неограниченно приближая его к нулю, то средняя векторная скорость будет стремиться к предельному вектору

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}(t),$$

приложенному в точке $P(t)$ и имеющему компонентами скалярные производные

$$\dot{x}(t),\ \dot{y}(t), \dot{z}(t).$$

Функцию $P(t)$ мы можем рассматривать как функцию от криволинейной абсциссы s точки P, а скаляр s — как функцию времени t. Диференцируя сообразно этому P как сложную функцию, получим:

$$\dot{P} = \frac{dP}{ds}\dot{s}(t) = \dot{s}(t)\boldsymbol{t},$$

где $\boldsymbol{t}$, как и в рубр. I, 75, означает единичный вектор, направленный по касательной к траектории в точке $P(t)$ и обращенный в сторону нарастающих s. Найденное выражение для вектора $\dot{P}(t)$ непосредственно обнаруживает, что он имеет длину, равную абсолютному значению $|\dot{s}(t)|$ скалярной скорости точки P в тот же момент t, что он направлен по касательной к траектории в точке $P(t)$, что он при этом обращен в сторону вектора $\boldsymbol{t}$ (т. е. в сторону возрастающих значений s) или в противоположную, в зависимости от того, имеет ли $\dot{s}(t)$ положительное или отрицательное значение, а это равносильно тому, что вектор $\dot{P}(t)$ всегда обращен в сторону движения.

Все эти соображения оправдывают введение нового понятия — *векторной скорости* точки P в момент t, под которой именно и разумеют вектор $\dot{P}(t)$, т. е. *производную от $P(t)$ по времени, отнесенную к рассматриваемому моменту t.*

Мы положим:

$$\boldsymbol{v}(t) = \dot{P}(t)$$

и впредь, говоря просто о скорости точки, всегда будем разуметь именно эту векторную скорость $\boldsymbol{v}$; число же $\dot{s}(t)$ мы, как уже было указано выше, будем впредь всегда называть *скалярной* скоростью. Если же нужно будет рассматривать, как нам это иногда придется, абсолютное значение $v = |\dot{s}(t)|$ векторной скорости, то мы можем его называть *напряжением скорости* [1]).

Между скоростью и элементарным смещением в силу определения всегда существует соотношение

$$dP = \boldsymbol{v}\,dt,$$

и если мы выберем произвольную постоянную точку O, например, начало координат, то (I, рубр. 71):

$$\frac{d\overline{OP}}{dt} = \frac{dP}{dt} = \boldsymbol{v}(t).$$

14. Внутренний характер скорости. Чтобы определить движение точки P, мы должны были установить, как систему координации, определенный координатный триэдр $Oxyz$. Если вместо этого мы выберем другой триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$, *неподвижный* относительно первого, то (декартовы) уравнения (2) движущейся точки P изменятся (именно, подвергнутся соответствующему преобразованию координат), но векторная скорость от этого не изменится, подобно тому как не изменятся ни форма траектории, ни закон движения по ней (путевое уравнение).

Это становится очевидным, если уяснить себе внутренний по отношению к движению характер определения скорости; но к этому можно притти и следующими точными соображениями. Обозначим через $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, основные версоры триэдра $Oxyz$ и через $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ координаты точки P в момент t. По отношению к этому триэдру мы будем иметь во всякий момент (I, рубр. 18):

$$\overline{OP} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}; \tag{11}$$

но это геометрическое уравнение определит, конечно, движение точки P и по отношению к любому другому триэдру, если мы в каждом отдельном случае отнесем к новому триэдру как точку P, так и векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

---

[1]) Термин введен авторами настоящего сочинения. (*Ред.*)

Положим, соотношение (11) отнесено к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$; мы получим выражение векторной скорости, диференцируя обе части этого уравнения по t. Так как по отношению к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$, по предположению, неподвижному относительно триэдра $Oxyz$, точка P и векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ остаются постоянными, то мы получаем:

$$\dot{P} = \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k}; \tag{11a}$$

отсюда следует, что и при новом триэдре координации векторною скоростью служит тот вектор, который имеет в системе $Oxyz$ компоненты $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$.

На языке декартовой аналитической геометрии это означает следующее: можно вычислить компоненты векторной скорости относительно триэдра $Oxyz$ и потом произвести преобразование координат к системе $\Omega\xi\eta\zeta$; можно сначала произвести преобразование координат, и затем вычислить компоненты векторной скорости относительно $\Omega\xi\eta\zeta$; результат получится один и тот же. Можно это выразить коротко, в современной терминологии, если сказать, что компоненты скорости конгредиентны координатам точки [1]).

---

[1]) Остановимся еще на рассуждениях настоящей рубрики. Прежде всего о самом понятии „внутренний характер" скорости. „Внутренними свойствами" геометрического или механического объекта (carattere intrinseco) называются такие свойства, которые получены аналитическими средствами, но не зависят от координации, характеризуя действительно геометрическое или механическое свойство объекта. Чтобы обнаружить, что тот или иной вывод приводит, действительно, к „внутреннему свойству" объекта, можно поступить двояко. Во-первых, можно определить это свойство чисто геометрическими или механическими соображениями, и тогда результат вычисления не может зависеть от координации. Так, производная функция точки $P(t)$ есть предел вектора, представляющего собою смещение точки ΔP, разделенное на скаляр Δt; это определение свободно от каких бы то ни было координатных соображений и потому устанавливает „внутренне" связанное с функцией точки $P(t)$ понятие о производном векторе $\dot{P}(t)$. Определяя векторную скорость движущейся точки как производную $\dot{P}(t)$, мы устанавливаем „внутренний" характер этого понятия. Во-вторых, можно найти аналитическое выражение устанавливаемой величины и затем *доказать*, что оно не меняется (остается инвариантным) при преобразовании координат; в настоящей рубрике авторы приводят именно такое доказательство *инвариантности* векторной скорости. Но и самое содержание доказательства, быть может, недостаточно ясно; оно заключается в следующем. При координатном триэдре $Oxyz$ и основных версорах $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ имеет место соотношение (11), которое приводит к выражению скорости (11a). Положим, что по отношению к триэдру $\Omega\xi\eta\zeta$ координаты точки P суть $\xi\eta\zeta$, а основные версоры суть $\boldsymbol{i}', \boldsymbol{j}', \boldsymbol{k}'$. Тогда в среде $\Omega\xi\eta\zeta$

$$\overline{\Omega P} = \xi\boldsymbol{i}' + \eta\boldsymbol{j}' + \zeta\boldsymbol{k}',$$

или, так сказать, для обитателя среды $\Omega\xi\eta\zeta$ скорость выразится производной:

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \dot{\xi}\boldsymbol{i}' + \dot{\eta}\boldsymbol{j}' + \dot{\zeta}\boldsymbol{k}'.$$

Но так как второй триэдр останется неподвижным относительно первого, то с одной стороны,

$$\overline{\Omega P} = \overline{OP} + \overline{\Omega O},$$

Важно еще отметить тут же, что все эти соображения справедливы в том предположении, что триэдр $\Omega\xi\eta\zeta$ остается неподвижным относительно триэдра $Oxyz$; обстоятельства складываются совершенно иначе, если новый триэдр *движется* относительно первоначального; это мы увидим ниже (гл. IV).

15. В случае плоского движения скорость всегда расположена в плоскости движения, так как она направлена по касательной к траектории. Точно так же в случае прямолинейного движения скорость во всякий момент направлена по прямой, по которой происходит движение.

Обращаясь вновь к движению точки P в пространстве, рассмотрим движение

$$x = x(t), \quad y = y(t)$$

ортогональной проекции P_1 точки P на плоскость $z=0$ (рубр. 5), скорость точки P_1 представляет собою вектор, лежащий в той же плоскости и имеющий компоненты $\dot{x}(t)$ и $\dot{y}(t)$; иными словами, этот вектор представляет собою проекцию скорости точки P на плоскость $z=0$. Точно так же скорость ортогональной проекции P_z точки P на ось z представляет собою проекцию на эту ось скорости точки P. Так как, с другой стороны, каждую неподвижную плоскость мы можем принять за плоскость $z=0$ и всякую (перпендикулярную к ней) прямую за ось z, то мы приходим к следующему заключению:

Если точка P движется в пространстве, то скорость $\boldsymbol{v}_1$ ее ортогональной проекции P_1 на произвольную плоскость (неподвижную) или на произвольную прямую (также неподвижную) совпадает с ортогональной проекцией на ту же плоскость или, соответственно, на ту же прямую скорости $\boldsymbol{v}$ точки P.

Сопоставляя это с тем, что изложено в рубр. 5, мы можем еще сказать: *если движение точки P в пространстве разложено на три прямолинейные движения по трем попарно взаимно перпендикулярным прямым или плоское движение и перпендикулярное ему прямолинейное движение, то скорость движения точки P в каждый момент представляет собою сумму (результирующую) скоростей слагающих движений.*

16. Движения с постоянной скоростью. В рубр. 8 мы видели, что равномерные движения (по любой траектории) характеризуются постоянством их *скалярной* скорости. Рассмотрим теперь движение более частного типа, происходящее с *постоянной векторной скоростью.*

Если $\boldsymbol{v}$ есть постоянная скорость движения, то мы можем выбрать триэдр $Oxyz$ так, чтобы ось x имела направление и сторону обращения вектора $\boldsymbol{v}$; тогда компоненты последнего будут

где $\overline{\Omega O}$ — постоянный вектор. С другой стороны, и для обитателя среды $\Omega\xi\eta\zeta$ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ остаются тремя неподвижными версорами (правда, это для него не основные версоры): для него остаются в силе соотношения (11) и (11a), т. е.

$$\dot{\overline{\Omega P}} = \dot{\overline{OP}}, \quad \dot{x}\boldsymbol{i} + \dot{y}\boldsymbol{j} + \dot{z}\boldsymbol{k} = \dot{\xi}\boldsymbol{i} + \dot{\eta}\boldsymbol{j} + \dot{\zeta}\boldsymbol{k}. \text{ (Ред.)}$$

иметь значения v, 0, 0, где v есть длина его. Выражая аналитически, что движущаяся точка P (x, y, z) имеет заданную скорость $\boldsymbol{v}$, мы получим три уравнения (диференциальных):

$$\frac{dx}{dt}=v, \quad \frac{dy}{dt}=0, \quad \frac{dz}{dt}=0.$$

Интегрируя их, мы получаем уравнения движения:

$$x=vt+c_1, \quad y=c_2, \quad z=c_3, \tag{12}$$

где c_1, c_2, c_3 суть *постоянные интегрирования.*

Выбирая эти три постоянные произвольно, мы получаем ∞^3 движений, имеющих данную векторную скорость; все они, как это явствует из уравнений (12), имеют траекториями прямые линии (при нашей координации — параллельные оси абсцисс), по которым движение происходит равномерно; таким образом *всякое движение, имеющее постоянную векторную скорость, есть прямолинейное и равномерное.*

Чтобы индивидуализировать каждое такое движение, т. е. чтобы определить значения постоянных интегрирования, достаточно задать положение, которое движущаяся точка должна занимать в какой-либо момент t_0: если x_0, y_0, z_0 суть координаты этого „начального" положения точки P, то уравнения движения принимают вид:

$$x=x_0+v(t-t_0), \quad y=y_0, \quad z=z_0,$$

в чем мы убеждаемся, подчиняя уравнения (12), вернее, содержащиеся в них произвольные постоянные, тому условию, чтобы при $t=t_0$ координаты x, y, z получали значения $x=x_0$, $y=y_0$, $z=z_0$.

Эти задания — координаты движущейся точки в начальный момент t_0 — называются *начальными условиями* движения.

17. Движения с заданною скоростью. Соображения предыдущей рубрики приводят к более общей задаче о *разыскании движений, совершающихся с заданной скоростью, хотя бы и переменной.*

Если v_x, v_y, v_z суть компоненты скорости $\boldsymbol{v}$, представляющие собою функции от t, то координаты x, y, z должны изменяться в функции от t таким образом, чтобы удовлетворялись диференциальные уравнения:

$$\frac{dx}{dt}=v_x, \quad \frac{dy}{dt}=v_y, \quad \frac{dx}{dt}=v_z. \tag{13}$$

Так как скорость $\boldsymbol{v}$ предполагается заданной, то ее компоненты суть заданные функции времени; мы предполагаем их интегрируемыми. Тогда уравнения (13) интегрируются в трех квадратурах.

Обозначая через t_0 момент в промежутке времени, для которого задана скорость $\boldsymbol{v}$, мы получим:

$$x=\int_{t_0}^{t} v_x\,dt+c_1, \quad y=\int_{t_0}^{t} v_y\,dt+c_2, \quad z=\int_{t_0}^{t} v_z\,dt+c_3.$$

Как и выше, присутствие трех произвольных постоянных обнаруживает, что существует ∞^3 движений, удовлетворяющих требованию. Каждое из них определяется, если задано положение движущейся точки в какой-либо момент, например, если известно, что в момент t_0 движущаяся точка занимает положение $P_0(x_0 y_0 z_0)$. Уравнения движения имеют в таком случае вид:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v_x\,dt, \quad y = y_0 + \int_{t_0}^{t} v_y\,dt, \quad z = z_0 + \int_{t_0}^{t} v_z\,dt.$$

Эти уравнения можно объединить в одном векторном уравнении:

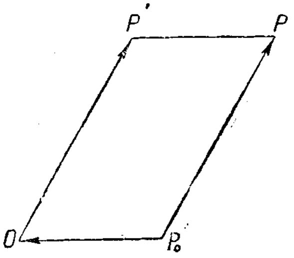
$$\overline{P_0P} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\,dt, \tag{14}$$

где под $P = P(t)$ разумеем положение движущейся точки в момент t. Это соотношение мы могли бы получить и непосредственно, интегрируя векторное уравнение:

$$\dot{\overline{P_0P}} = \boldsymbol{v}(t),$$

эквивалентное уравнениям (13).

Уравнение (14) обнаруживает, в каком соотношении находятся между собой ∞^3 движений, имеющих ту же скорость $\boldsymbol{v}$. Сравним два таких движения, например, движение общего вида (14) и движение точки P', которая при той же скорости $\boldsymbol{v}$ находится в момент t_0 в начале координат O. В применении к движению точки P' уравнение (14) примет вид:



Фиг. 33.

$$\overline{OP'} = \int_{t_0}^{t} \boldsymbol{v}(t)\,dt.$$

Следовательно, $\overline{OP'} = \overline{P_0P}$; равенство этих векторов влечет за собою равенство векторов $\overline{PP'} = \overline{P_0O}$ (фиг. 33).

Так как P есть положение первой точки в любой момент t, а P' — положение в тот же момент второй точки, то траектория второй движущейся точки отличается от траектории первой только тем, что все ее точки смещены на один и тот же вектор $\overline{P_0O}$. Таким образом векторной скоростью, заданной в функции времени, траектория движущейся точки геометрически определяется вполне; в зависимости от начального положения, она может быть только смещена в пространстве параллельно самой себе на определенный вектор; не претерпевает при этом никакого изменения и путевое уравнение.

18. Обратимся теперь к еще более общему случаю, когда скорость движущейся точки задана в функции не одного только времени, но и самого положения точки, т. е. когда

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(P/t).$$

В этом случае компоненты скорости v_x, v_y, v_z заданы в функции четырех переменных x, y, z, t; задача сводится к разысканию трех функций времени x, y, z, удовлетворяющих системе диференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t)\ ^{1)}. \quad (15)$$

В этом случае решение задачи требует, таким образом, как говорят обыкновенно, интегрирования системы диференциальных уравнений (15). Как известно из анализа, это интегрирование, вообще, не может быть выполнено в квадратурах и тем менее в конечном числе элементарных функций; это можно только сделать путем разложения неизвестных функций в ряды. Во всяком случае, при достаточно широких условиях для функций четырех переменных v_x, v_y, v_z доказывается, что система (15) допускает бесчисленное множество решений, которые в совокупности составляют *общий интеграл*, зависящий от трех произвольных постоянных; однако они, как правило, не носят характера аддитивных постоянных [2]).

Таким образом и в этом общем случае также существует ∞^3 различных движений, имеющих данную скорость $\boldsymbol{v}$; и в этом случае, располагая тремя произвольными постоянными, можно выделить одно из этих движений, если потребовать в виде начальных условий, чтобы движущаяся точка в некоторый определенный (начальный) момент проходила через данное положение в пространстве. Понятно, конечно, что при этих условиях переход от одного из ∞^3 движений к другому связан с изменением как вида кривой, так и путевого уравнения.

---

[1]) Заметим, что система диференциальных уравнений (15) эквивалентна одному векторному уравнению:

$$\dot{P} = f(P, t),$$

которое часто допускает непосредственное интегрирование без перехода к соответствующей скалярной системе. (*Ред.*)

[2]) Полезно напомнить, что для системы обыкновенных совокупных диференциальных уравнений, число которых равно числу неизвестных функций и которые разрешаются относительно производных высших порядков, вообще, существует система интегралов, зависящих от произвольных постоянных, число которых равно сумме порядков высших производных. Так, например, общий интеграл системы диференциальных уравнений

$$\ddot{u} = \varphi(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}, \ddot{v}), \quad \dddot{v} = \psi(t, u, \dot{u}, v, \dot{v}, \ddot{v})$$

зависит от пяти произвольных постоянных.

4. Выражение плоских движений в полярных координатах. Секториальная скорость.

19. Радиальная и поперечная скорость. Угловая скорость. Положим, что в плоскости относительно системы осей Oxy декартовых ортогональных координат происходит движение точки P, выражаемое уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t). \tag{16}$$

Отнесем это движение к системе полярных координат, имеющей полюсом начало O декартовых координат, а полярной осью положительную полуось x-ов; за положительную сторону обращения аномалий (полярных углов) примем ту, при которой переход от ориентированной оси x к ориентированной же оси y совершается путем поворота на прямой угол. Аномалии будем измерять в радианах.

В течение движения радиус-вектор ρ и аномалия $\theta = x\widehat{OP}$ движущейся точки P будут определенными функциями времени; уравнения

$$\rho = \rho(t) \quad \text{и} \quad \theta = \theta(t) \tag{17}$$

можно назвать *уравнениями движения* в полярных координатах. Но здесь необходимо одно существенное замечание. Как известно из аналитической геометрии, чтобы обеспечить взаимно однозначную зависимость между точками плоскости и парами значений полярных координат ρ и θ, необходимо на последние наложить ограничения, выражающиеся неравенствами $\rho > 0$, $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$. Но при этих условиях, если точка P в своем плоском движении обойдет вокруг начала координат в положительную сторону и перейдет через положительную полуось x-ов (полярную ось), то аномалия θ обречена на то, чтобы при этом внезапно перескочить со значения 2π на значение 0. Таким образом в функцию θ в уравнении (17) вводится разрыв, который, однако, ни в какой мере не характеризует разрыва в самом движении; он зависит только от ограничения $\theta < 2\pi$, условия, наложенного на аномалию θ. В таких случаях, чтобы уничтожить разрыв, так сказать, искусственно созданный, обыкновенно отказываются от этого ограничения аномалии и допускают, чтобы θ, следуя непрерывному ходу движения, непрерывно же изменялось и проходя через 2π, т. е. получало бы при этих условиях значения, превышающие 2π.

Аналогично этому, если точка P, двигаясь непрерывно, без внезапного разрыва скорости, проходит через полюс, вышеуказанные ограничения значений ρ и θ приводят к тому, что аномалия и здесь претерпевает разрыв: в то время как ρ при прохождении через полюс достигает наименьшего своего значения 0 и затем начинает вновь непрерывно возрастать, аномалия делает скачок от значения θ_0 (предельное значение аномалии, когда P непрерывным движением приближается к полюсу) к значению $\theta_0 \pm \pi$. Но и здесь искусственно нарушенная непрерывность может быть при надобности восстановлена, если отказаться от ограничения $\rho > 0$ и принять, что радиус-вектор, проходя через нуль, может непрерывно перейти от положительных значений к отрицательным, и обратно.

К этому приему мы прибегаем тогда, когда по существу дела важно сохранить непрерывность соответствия между точкой P и ее полярными координатами ρ, θ. При этом, однако, как нами уже было отмечено, приходится примириться с потерей однозначности (того же соответствия) во всякой области, для которой начало O является внутренней точкой. Декартовы координаты свободны от подобных дефектов.

Приняв все это, припомним, что между функциями (16) и (17) существуют известные соотношения:

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta.$$

Диференцируя эти уравнения, мы получим для компонент скорости выражения:

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta, \quad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta; \tag{18}$$

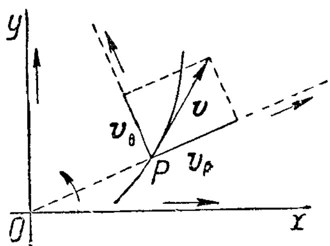
комбинируя же эти соотношения с формулами преобразования координат, получим:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\theta}, \tag{18a}$$

а отсюда для квадрата скалярной скорости формулу:

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2. \tag{19}$$

Это выражение приводит к разложению скорости на две ортогональные компоненты, которые целесообразно установить непосредственно.



Фиг. 34.

С этой целью рассмотрим вместе с осью OP перпендикулярную к ней прямую в точке P и ориентируем эту прямую таким образом, чтобы она была расположена относительно OP так же, как ось y ориентирована относительно оси x (фиг. 34). Так как направляющие косинусы оси OP и ориентированного перпендикуляра к ней суть $\cos\theta$, $\sin\theta$ и соответственно

$$\cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta, \qquad \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\theta,$$

то проекции v_ρ и v_θ скорости $\boldsymbol{v}$ на эти новые две оси будут иметь скалярные значения:

$$v_\rho = \dot{x}\cos\theta + \dot{y}\sin\theta, \qquad v_\theta = -\dot{x}\sin\theta + \dot{y}\cos\theta.$$

Подставляя сюда вместо $\dot{x}$ и $\dot{y}$ их значения (18), получим:

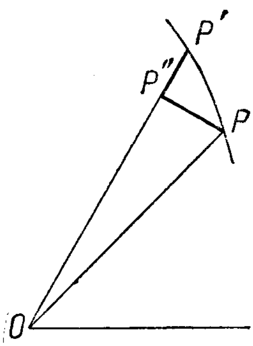
$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\theta = \rho\dot{\theta}.$$

Это суть компоненты векторной скорости v по построенным двум новым осям; возвышая эти компоненты в квадрат и складывая их, мы получим вновь соотношение (19).

Компонента v_ρ называется *радиальной скоростью,* так как

$$v_\rho = \frac{d\rho}{dt}$$

представляет собою отношение элементарного наращения расстояния точки от начала (полюса) O к соответствующему элементу времени dt, поэтому v_ρ называют также *скоростью удаления* точки (от полюса).



Фиг. 35.

Слагающая v_θ называется *поперечной* или *поворотной* (по отношению к радиусу-вектору) *скоростью* точки; наконец, производная

$$\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$$

называется угловой скоростью точки, так как она выражает скорость изменения аномалии θ. Поворотная скорость v_θ представляет собою произведение радиуса-вектора ρ на угловую скорость точки. Если мы это запишем в виде:

$$v_\theta = \frac{\rho\, d\theta}{dt},$$

то числитель этой дроби выразит длину дуги поворота PP'', которую описала бы вокруг полюса точка P (фиг. 35), если бы радиус-вектор, переходя из положения OP в OP', не менял своей длины (так что PP'' была бы дуга окружности). Поэтому компоненту v_θ называют *поворотной скоростью* точки.

20. Секториальная скорость. При движении точки P радиус-вектор OP описывает некоторую площадь. Ее измеряют, отсчитывая ее от некоторого начального положения OP_0 радиуса-вектора (фиг. 36) и считая ее положительной, когда она обращена в сторону возрастающих аномалий, и отрицательной в противоположном случае; будем обозначать через A значение, которое она принимает в произвольный момент t, когда движущаяся точка занимает положение P. Пусть P' будет бесконечно близкое положение точки, занимаемое ею в момент $t+dt$. За элемент времени, протекающий от момента t до момента $t+dt$, точка P

описывает элемент площади POP', который (по крайней мере, до бесконечно малых высшего порядка) равен площади кругового сектора радиуса ρ с центральным углом (растворением), равным $d\theta$. Поэтому

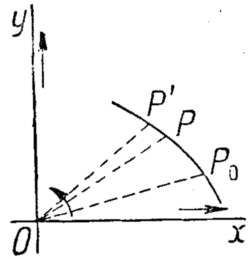
$$|dA| = \frac{1}{2}\rho^2 |d\theta|;$$

а так как, по нашему соглашению, dA и $d\theta$ имеют тот же знак, то

$$dA = \frac{1}{2}\rho^2 d\theta,$$

а вместе с тем

$$\dot{A} = \frac{1}{2}\rho^2 \dot{\theta}.$$



Фиг. 36.

По соображениям, которые после всего изложенного совершенно ясны, производную $\dot{A}$ называют *секториальной скоростью* точки P относительно центра O.

Соотношение (18a) приводит к выражению секториальной скорости в декартовых координатах:

$$\dot{A} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x}). \qquad (20)$$

21. Понятие о секториальной скорости легко распространяется также на точку, совершающую совершенно произвольное движение в пространстве. Чтобы притти к этому обобщению, возвратимся сначала к случаю плоского движения и именно к выражению (20) угловой скорости относительно начала O. В точке O восставим к плоскости движения перпендикуляр и направим по нему ось z, ориентируя ее таким образом, чтобы получить правосторонний триэдр $Oxyz$. На этой оси нанесем вектор $\boldsymbol{v}$, длина которого равна абсолютной величине секториальной скорости (20) и который обращен в положительную или отрицательную сторону этой оси, смотря по тому, имеет ли секториальная скорость точки положительное или отрицательное значение; можно сказать, что вектор $\boldsymbol{v}$ отображает векториальную скорость как по величине, так и по знаку. Всматриваясь в выражение (20) ближе, мы видим, что построенный таким образом вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою половину векторного произведения двух векторов, имеющих компоненты:

$$x,\ y,\ 0 \quad \text{и} \quad \dot{x},\ \dot{y},\ 0,$$

т. е. векторов $\overline{OP}$ и $\boldsymbol{v}$. Таким образом

$$\boldsymbol{v} = \frac{1}{2}[\overline{OP}\,\boldsymbol{v}], \qquad (21)$$

т. е. вектор $\boldsymbol{v}$ представляет собою *половину момента векторной скорости движущейся точки относительно (неподвижного) центра* O.

Этому вектору $\boldsymbol{v}$, модуль которого дает секториальную скорость точки, как она выше определена в скалярном своем значении, и который в каждый момент определяет сторону движения, как правостороннего относительно него, присваивается название *векторной секториальной скорости данной движущейся точки относительно центра* O.

Это новое определение имеет по сравнению с предыдущим то преимущество, что оно сообщает секториальной скорости значение *внутреннего* характера, следовательно, не зависящее от координатного триэдра даже при изменении начала координат, лишь бы только оставался неподвижным центр O, относительно которого секториальная скорость точки определяется.

И именно вследствие этого внутреннего (инвариантного) своего характера новое определение непосредственно применяется также к любому движению точки в пространстве; именно, при любом движении секториальная скорость движущейся точки P относительно центра O определяется как вектóрное произведение

$$\frac{1}{2}[\overline{OP}\boldsymbol{v}]; \tag{22}$$

это есть вектор, который в каждый момент движения перпендикулярен к плоскости (вообще говоря, переменной), проходящей в этот момент через центр O и через скорость движущейся точки $\boldsymbol{v}$; он обращен таким образом, что движение в этот момент представляется относительно него правосторонним; его модуль представляет собою отношение элемента площади, которую радиус-вектор описывает в указанной сейчас плоскости в элемент времени к продолжительности этого элемента времени dt.

Если движение точки P отнесено к ортогональным декартовым координатам, начало которых совпадает с центром O, то компоненты секториальной скорости имеют значения (I, рубр. 27):

$$\frac{1}{2}(y\dot{z}-z\dot{y}), \qquad \frac{1}{2}(z\dot{x}-x\dot{z}), \qquad \frac{1}{2}(x\dot{y}-y\dot{x});$$

мы видим, что это суть скалярные секториальные скорости ортогональных проекций точки P на плоскости yz, zx, xy.

Отметим, наконец, что секториальная скорость, как это видно из соотношения (22), может в некоторый момент обратиться в нуль только в том случае, если наступает одно из следующих обстоятельств (I, рубр. 21): либо точка P проходит в этот момент через центр O; либо обращается в нуль скорость $\boldsymbol{v}$; либо скорость направлена радиально, т. е. по прямой OP.

5. Ускорение.

22. Равномерно переменное движение. К понятию об ускорении мы приходим, вычисляя, так сказать, быстроту, с которой от момента к моменту изменяется скорость движущейся точки.

Подобно тому как мы это делали при определении скорости, обратимся к изучению внутреннего характера движения, считая заданной его траекторию, и начнем с того сравнительно простого случая (можно сказать, наиболее простого после равномерного движения), когда скалярная скорость $\dot{s}$ движущейся точки представляет собою линейную функцию времени, т. е. когда

$$\dot{s} = at + b, \tag{23}$$

где a и b—постоянные; при этом $a \neq 0$, ибо при $a = 0$ мы имели бы равномерное движение. Постоянная b представляет собою скорость движения в момент $t = 0$; что касается постоянной a, то из соотношения (23) непосредственно вытекает вывод, совершенно аналогичный тому, который мы получили в рубр. 8, именно: *в течении движения изменение скорости $\Delta\dot{s}$ за любой промежуток времени Δt находится к продолжительности этого промежутка Δt в постоянном отношении, равном a,* т. е.

$$\frac{\Delta\dot{s}}{\Delta t} = a.$$

Эта постоянная a, которая, в частности, определяет изменение скорости в единицу времени, называется *ускорением* рассматриваемого движения; самое же это движение, с очевидным указанием характера изменения скорости с течением времени, называется *равномерно переменным.*

Небесполезно будет прибавить, что понятие об ускорении было впервые установлено Галилеем [1]) именно как изменение скорости в единицу времени для случая свободного падения тяжелых тел, которое, как мы увидим ниже, представляет собою равномерно изменяющееся движение.

Обращаясь к движению (23), отметим прежде всего, что ускорение a представляет в этом случае вторую производную $\ddot{s}$ криволинейной абсциссы s по времени. Таким образом в произвольный момент t движение, согласно критерию рубр. 12,

---

[1]) Галилео Галилей (Galileo Galilei) родился в Пизе в 1564 г., умер в Арчетри в 1642 г., может считаться продолжателем Архимеда в области статики и творцом динамики [см. предисловие Фаваро (Favaro) к т. VIII в так называемом „национальном издании" сочинений Галилея]. Его капитальное сочинение носит название „Беседы и математические доказательства, относящиеся к двум новым наукам, касающимся механики и местных движений" („Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali"), Edizione Nazionale delle opere di Galileo, Vol. VIII *).

*) Имеется русский перевод (ГТТИ 1934). (*Ред.*)

будет ускоренным или замедленным, в зависимости от того, будет ли

$$a(at+b)>0 \quad \text{или} \quad <0.$$

Но эти неравенства мы можем писать в виде:

$$a^2\left(t+\frac{b}{a}\right)>0 \quad \text{или соответственно} <0.$$

Отсюда мы заключаем, что движение будет замедленным, пока $t<-\frac{b}{a}$, т. е. до момента $-\frac{b}{a}$; в этот момент скорость обращается в нуль, происходит остановка, после чего движение уже навсегда становится ускоренным.

Можно, таким образом, сказать, что в равномерно переменном движении всегда имеются две фазы: первая фаза *замедления*, вторая — *ускорения*.

Чтобы, далее, еще ближе установить ход рассматриваемого движения, рассмотрим еще, бывает ли оно *прогрессивным* или *регрессивным* и при каких условиях оно имеет тот или другой характер. Так как это зависит (рубр. 12) от знака скорости

$$\dot{s}=a\left(t+\frac{b}{a}\right),$$

то мы и рассмотрим два случая, когда $a>0$ и когда $a<0$.

В первом случае $\dot{s}$ имеет положительное значение при $t+\frac{b}{a}>0$ и отрицательное при $t+\frac{b}{a}<0$; это значит, движение будет ретроградным до момента $t=-\frac{b}{a}$, т. е. в фазе замедления; прогрессивным оно будет в ускоренной фазе. В случае $a<0$ дело будет обстоять обратно: движение будет прогрессивным в фазе замедления и регрессивным в фазе ускорения.

Интегрируя диференциальное уравнение (23), мы получим путевое уравнение движения:

$$s=\frac{1}{2}at^2+bt+c, \tag{24}$$

где постоянная интегрирования c представляет собою криволинейную абсциссу движущейся точки в момент $t=0$.

Если отсчитывать время от момента остановки $\left(-\frac{b}{a}\right)$, т. е. если положить

$$t_1=t+\frac{b}{a}, \tag{25}$$

то уравнение (23) примет вид:

$$\dot{s}=at_1. \tag{23'}$$

Мы получим абсциссу положения точки в момент остановки, если в формуле (24) положим $t = -\frac{b}{a}$; это даст:

$$\frac{2ac - b^2}{2a}.$$

Приняв момент остановки за начало отсчета времени, т. е., выполнив преобразование (25), мы теперь и расстояния s будем отсчитывать от положения точки в момент остановки, т. е. мы положим:

$$s_1 = s - \frac{2ac - b^2}{2a};$$

тогда формула (24) значительно упростится. В самом деле, ввиду того, что вышеуказанное преобразование мы считаем выполненным, уравнение (23′) сохранит свой вид, т. е.:

$$\dot{s}_1 = at_1.$$

Интегрируя это уравнение, будем иметь:

$$s_1 = \frac{1}{2} at_1^2 + c_1.$$

Но так как теперь при $t_1 = 0$ и s_1 должно обращаться в нуль, то $c_1 = 0$; мы получим окончательно:

$$s_1 = \frac{1}{2} at_1^2. \tag{24′}$$

Представим себе теперь, что некоторое движение этого рода можно рассматривать не в каком-нибудь определенном промежутке времени, а на всем протяжении времени, т. е. от $t_1 = -\infty$ до $t_1 = +\infty$; так, это может иметь место, например, в случае прямолинейной траектории. Тогда уравнение (24′) показывает, что при неограниченно возрастающих значениях t_1, как положительных, так и отрицательных, s_1 стремится к бесконечности, и притом в обоих случаях к положительной бесконечности, если $a > 0$, и к отрицательной, если $a < 0$ [1]).

Сверх того, если рассмотрим два момента $-t_1$ и t_1 (из которых один предшествует моменту остановки, а другой на такой же промежуток времени следует за ним), то мы видим из уравнений (23′) и (24′), что в такие два момента движущаяся точка проходит через то же положение на траектории и с тем же напряжением скорости, обращенной, однако, в эти моменты в противоположные стороны.

---

[1]) Это значит, при движениях этого рода движущаяся точка несется из бесконечности к моменту остановки, затем поворачивает обратно и уносится в бесконечность. См. ниже в тексте. (*Ред.*)

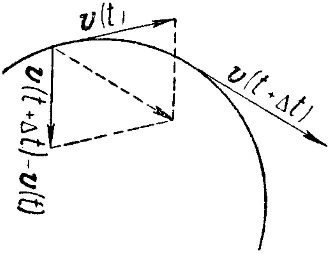
Возвращаясь теперь к общему случаю, т. е. к произвольному выбору начала времен и начала расстояний, мы можем дать изложенному следующее выражение.

При равномерно переменном движении, выражаемом путевым уравнением (24), *точка продвигается с бесконечно большого расстояния со стороны положительных или отрицательных абсцисс, смотря по тому, имеет ли ускорение a положительное или отрицательное значение; равномерно замедленным движением она доходит до точки, имеющей абсциссу*

$$\frac{2ac-b^2}{2a}, \tag{26}$$

которой она достигает в момент $-\frac{b}{a}$; *вслед за этим точка поворачивает обратно и равномерно ускоренным движением несется в ту сторону, из которой пришла; в каждом положении она при этом приобретает скорость того же напряжения, что и при первом прохождении через это положение, но обращенную в обратную сторону.*

Уравнение (24) показывает, что путевая диаграмма равномерно переменного движения представляет собою параболу, ось симметрии которой параллельна оси времени; эта парабола обращена своей вогнутостью в сторону положительных или отрицательных времен, в зависимости от того, имеет ли a положительное или отрицательное значение. Эта диаграмма также отчетливо обнаруживает различные обстоятельства, установленные выше аналитическим путем.



Фиг. 37.

23. Ускорение. Обратимся вновь к точке, произвольно движущейся в пространстве, и определим векторное ускорение этого движения, руководясь внутренними его свойствами.

Рассмотрим наращение (векторное):

$$\Delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t),$$

которое получает скорость движения в интервале от произвольно взятого момента t до $t+\Delta t$, и приложим вектор $\Delta \boldsymbol{v}$ в точке $P(t)$ (фиг. 37); затем разделим его на Δt. Полученный, таким образом, вектор

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{\Delta t} = \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t) - \boldsymbol{v}(t)}{\Delta t}$$

выражает среднее нарастание скорости и имеет компонентами

$$\frac{\dot{x}(t+\Delta t) - \dot{x}(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\dot{y}(t+\Delta t) - \dot{y}(t)}{\Delta t}, \quad \frac{\dot{z}(t+\Delta t) - \dot{z}(t)}{\Delta t};$$

этот вектор называется *средним ускорением* точки P за промежуток времени от t до $t+\Delta t$.

Ускорением точки P в момент t называется предел, к которому стремится среднее ускорение за интервал Δt, когда продолжительность его при неизменном начальном моменте стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\boldsymbol{v}(t+\Delta t)-\boldsymbol{v}(t)}{(\Delta t)} \; .$$

Этот предел представляет собою производную $\dot{\boldsymbol{v}}$ скорости $\boldsymbol{v}$ по времени или также, поскольку $\boldsymbol{v}=\frac{dP}{dt}$, вторую производную $\frac{d^2P}{dt^2}=\ddot{P}$ точки P по времени. Обозначая поэтому ускорение, представляющее собою векторную функцию времени, через $\boldsymbol{a}(t)$, будем иметь, согласно определению:

$$\boldsymbol{a}(t)=\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=\frac{d^2P}{dt^2};$$

компоненты ускорения по осям координат имеют значения:

$$a_x=\ddot{x}(t), \quad a_y=\ddot{y}(t), \quad a_z=\ddot{z}(t). \tag{27}$$

Ускорение является, таким образом, новой кинематической величиной, которая представляет собою, если оставим в стороне ее векторный характер, отношение некоторой скорости к промежутку времени. Поэтому, приняв уже за единицы для измерения расстояния и времени метр и секунду, можно принять за единицу ускорения „ускорение в 1 *м/сек²*“, т. е. ускорение того равномерно ускоренного движения, при котором скорость нарастает в секунду на 1 *м/сек*.

24. Из внутреннего по отношению к движению характера определения ускорения непосредственно вытекает, что формулы (27) остаются в силе, как бы мы ни меняли оси координат, лишь бы новые оси оставались *неподвижными* по отношению к старым; это утверждение можно также оправдать более точным анализом, совершенно аналогично тому, как это было сделано в случае скорости (рубр. **14**). Вместе с тем, как и в рубр. **15**, мы приходим к следующим выводам.

В случае плоского или прямолинейного движения ускорение всегда лежит в плоскости или на прямой движения.

Если точка движется в пространстве, то ускорение ее проекции на плоскость или на прямую всегда совпадает с проекцией на эту плоскость или, соответственно, на эту прямую ускорения движущейся точки.

25. Мы увидим в динамике, какое капитальное значение имеет задача *определения движения точки по данному ускорению этого движения*. Наиболее общий случай этой задачи, к которому приводит теоретическое исследование явлений движения, заключается в том, что ускорение бывает задано в функции времени, положения точки и скорости:

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}(P, \dot{P}/t).$$

Это означает в аналитическом (скалярном) выражении, что компоненты a_x, a_y, a_z ускорения $\boldsymbol{a}$, отнесенные к некоторому определенному триэдру, заданы в функции переменных $x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t$.

Задача сводится, таким образом, к интегрированию системы обыкновенных диференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{x} = a_x, \quad \ddot{y} = a_y, \quad \ddot{z} = a_z;$$

как известно, эти уравнения в достаточно широких условиях для функций a_x, a_y, a_z допускают бесчисленное множество решений, которые в своей совокупности зависят от *шести произвольных постоянных* [1]). Мы имеем, таким образом, ∞^6 различных движений, имеющих данное ускорение.

Чтобы индивидуализировать движение, т. е. выделить одно движение из этой совокупности их, необходимо фиксировать значение этих шести произвольных постоянных; для этого нужно присоединить подходящие начальные условия; достаточно, например, установить, что в заданный момент t_0 точка должна проходить через заданное положение $P_0(x_0, y_0, z_0)$ с заданной скоростью $\boldsymbol{v}_0(\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0)$.

26. *Тангенциальное* (касательное) *и нормальное* ускорения. Ускорение $\boldsymbol{a}(t)$ представляет собою вектор, который, по определению, в каждый момент приложен в точке $P(t)$, в которой в этот момент находится движущаяся точка P. Чтобы уяснить себе, как этот вектор $\boldsymbol{a}$ может быть от момента к моменту расположен относительно траектории, воспользуемся соотношением:

$$\boldsymbol{v} = \dot{s}\boldsymbol{t},$$

установленным в рубр. **13**. Диференцируем это соотношение по времени, рассматривая при этом единичный вектор $\boldsymbol{t}$ как функцию от криволинейной абсциссы s, которая, в свою очередь, представляет собою функцию времени $s(t)$. Если мы при этом воспользуемся соотношением Френе (I, рубр. **81**):

$$\frac{d\boldsymbol{t}}{ds} = \frac{1}{r}\boldsymbol{n},$$

где r есть радиус кривизны траектории в точке $P(t)$, а $\boldsymbol{n}$ — версор главной нормали, направленной к центру кривизны, то мы получим:

$$\boldsymbol{a} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}\dot{\boldsymbol{t}} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \dot{s}\frac{d\boldsymbol{t}}{ds}\frac{ds}{dt} = \ddot{s}\boldsymbol{t} + \frac{v^2}{r}\boldsymbol{n}.$$

Отсюда, в первую очередь, вытекает, что компонента ускорения по бинормали равна нулю, т. е. *что ускорение в каждый момент движения расположено в соприкасающейся плоскости траектории в точке, занимаемой в этот момент движущейся точкой.*

---

[1]) См. примечание на стр. 105.

Две векторные компоненты $\ddot{s}t$ и $\frac{v^2}{r}n$, равно как и их скалярные значения $\ddot{s}$ и $\frac{v^2}{r}$, называются *тангенциальным* или *касательным* ускорением и — соответственно — *нормальным* или центростремительным ускорением. Первое направлено по касательной в сторону возрастающих значений s при $\ddot{s}>0$ и в противоположную сторону при $\ddot{s}<0$. Что касается второго, нормального ускорения, то его скалярное значение $\frac{v^2}{r}$ всегда положительно; поэтому это ускорение всегда направлено к центру кривизны и потому также называется *центростремительным*.

Касательное ускорение обращается постоянно в нуль в том, и только в том, случае, когда тождественно $\ddot{s}=0$, т. е. $\dot{s}$ есть постоянная. Таким образом, *равномерные движения* (рубр. 8) *характеризуются* (при любой траектории) *тем, что их касательное ускорение равно нулю*, т. е. что *они имеют чисто нормальное ускорение*.

Из предыдущей рубрики, вместе с тем, следует, что *равномерно переменные движения* (на любой траектории) *характеризуются постоянством касательного ускорения*; это не исключает существования нормального ускорения, вообще переменного; если при этом траектория не прямолинейная, то нормальное ускорение не может быть постоянно равно нулю. В самом деле, последнее имеет значение $\frac{v^2}{r}$; так как v не может постоянно равняться нулю (скорость может обращаться в нуль только в отдельных точках остановки), то нормальное ускорение может быть равно нулю во всех точках траектории только в том случае, если по всей траектории равно нулю $\frac{1}{r}$, т. е. ее кривизна; так как это имеет место только для прямой линии, то мы отсюда заключаем, что *отсутствие нормального ускорения во все время движения характеризует прямолинейное движение*.

Комбинируя предыдущие выводы, мы заключаем, что *равномерные прямолинейные движения характеризуются тем, что их ускорение* (*полное*) *тождественно равно нулю*.

6. Движения с постоянным ускорением. Движения тяжелых тел.

27. Законы движения тяжелых тел. Установив в предыдущих параграфах общие начала кинематики точки, мы в последующих параграфах настоящей главы приложим их к изучению различных частных случаев движения, которые систематически встречаются в различного рода конкретных вопросах. Мы начнем с изучения движений, происходящих с *постоянным ускорением*.

Типичный пример такого движения представляет падение тяжелых тел, предоставленных самим себе с определенной начальной скоростью, которая в частности может быть равна и нулю.

Законы движения тяжелых тел были установлены Галилеем; они получают выражение в следующих двух положениях:

1) *Тяжелое тело, предоставленное самому себе без начальной скорости* (т. е. выходящее из состояния покоя), *падает по вертикали, двигаясь с постоянным ускорением, направленным вертикально вниз и имеющим одно и то же значение для всех тел.*

2) *Тяжелое тело, брошенное в каком угодно направлении с какой угодно начальной скоростью, всегда движется с тем же самым ускорением, что и при свободном падении.*

Первый из этих законов в курсах физики устанавливается экспериментально при помощи машины Атвуда. Правда, нужно отметить, что интерпретация действия этого аппарата требует не только сведений из кинематики, но опирается существенно (как это будет показано в отделе динамики) на общие принципы механики. Как бы там ни было машина Атвуда дает первоначальную оценку ускорения при падении тяжелых тел; это так называемое *ускорение тяжести* (в скалярном его значении) принято обозначать буквой g.

Важно указать, что эти законы, как это было уже известно Галилею, могут иметь силу только в пустоте; в воздухе необходимо учесть сопротивление, которое оказывается воздухом движущимся в нем телам. Таким образом формулированные выше законы в применении к движению тяжелых тел в воздухе дают лишь приближенное представление о нем, иногда даже грубо приближенное. Но даже и в пустоте, если область наблюдения не ограничена надлежащим образом, в ускорении тяжести обнаруживаются заметные отклонения от вертикальной линии. Более того, и самое напряжение ускорения, как это установлено более точными экспериментальными измерениями, слегка меняется от места к месту; именно, оно увеличивается с широтой места и уменьшается с повышением над уровнем моря [1]).

Например, в следующих пунктах g (выраженное в $м/сек^2$ и предварительно приведенное к уровню воды в океане) имеет значения:

в Риме	(при северной широте в 41°53′,5)	$g = 9{,}8038$
„ Вене	(„ „ „ „ 48°12′,7)	$g = 9{,}8092$

[1]) Значения в важнейших пунктах Союза ССР:

Ленинград	(при северной широте в 59° 57′)	$g = 9{,}8193$
Москва	(„ „ „ „ 55° 45′)	$g = 9{,}8156$
Свердловск	(„ „ „ „ 56° 48′)	$g = 9{,}8162$
Харьков	(„ „ „ „ 50° 0′)	$g = 9{,}8102$
Одесса	(„ „ „ „ 46° 29′)	$g = 9{,}8077$
Тифлис	(„ „ „ „ 40° 43′)	$g = 9{,}8018$

(*Ред.*)

в Париже	(при северной широте в $48°50',2$)	$g=9,8096$
„ Лондоне (Гринвич)	(„ „ „ „ $51°28',6$)	$g=9,8120$
„ Берлине (Потсдам)	(„ „ „ „ $52°22',9$)	$g=9,8130$
„ Сингапуре	(„ „ „ „ $1°17',3$)	$g=9,7807$
на мысе Флора (итал. экспед.)	(„ „ „ „ $79°56',8$)	$g=9,8307$
в экспед. Нансена	(„ „ „ „ $85°55',3$)	$g=9,8315$

Во всяком случае в не очень большом поле наблюдения можно в виде первого приближения принять, что тяжелые тела в своем движении имеют ускорение, постоянное по величине и направлению; это ускорение (векторное) мы будем обозначать через $\boldsymbol{g}$. Чтобы составить себе наглядное представление о движении какого угодно тяжелого тела, будет достаточно изучить движение точки P, имеющей постоянное ускорение $\boldsymbol{g}$; и ясно, что все, что мы скажем в этом случае, по существу, справедливо для движения точки с любым постоянным ускорением.

28. Движение тяжелых тел. Выбрав для координации триэдр, у которого ось y направлена вертикально вниз, вследствие чего плоскость xy будет вертикальной, мы получим для компонент ускорения g значения:

$$0,\ g,\ 0;$$

координаты же точки P должны будут во все время движения удовлетворять уравнениям:

$$\ddot{x}=0,\quad \ddot{y}=g,\quad \ddot{z}=0.$$

Интегрируя эти уравнения, мы получим для скорости $\boldsymbol{v}$ значения:

$$\dot{x}=\dot{x}_0,\quad \dot{y}=gt+\dot{y}_0,\quad \dot{z}=\dot{z}_0, \tag{28}$$

где $\dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0$ означают компоненты (произвольные) скорости $\boldsymbol{v}_0$ в момент $t=0$ (начальная скорость).

Повторное интегрирование дает уравнения движения:

$$x=\dot{x}_0t+x_0,\quad y=\frac{1}{2}gt^2+\dot{y}_0t+y_0,\quad z=\dot{z}_0t+z_0, \tag{29}$$

где x_0, y_0, z_0 суть координаты (произвольные) положения P_0 точки в момент $t=0$ (начальное положение).

Без существенных ограничений мы можем принять, что начало координат O помещено в точке, представляющей начальное положение P_0; это приводит к тому, что мы можем положить в уравнениях (29) $x_0=y_0=z_0=0$. Если при этом начальная скорость v_0 не окажется уже в плоскости xy, т. е, если $\dot{z}_0$ уже не окажется равным нулю, то мы сможем вращением координатного триэдра вокруг оси y привести плоскость xy в положение, при котором она будет содержать начальную скорость v_0; более того, мы можем выполнить это так, чтобы компонента вектора v_0 по оси x, если она отлична от нуля, оказалась положительной.

По выполнении этого вращения мы будем иметь в уравнениях (28) и (29) $\dot{z}_0=0$, $\dot{x}_0\geqslant 0$. Таким образом в результате произведенного преобразования к новым осям, теперь уже вполне определенным, уравнения (28) и (29) примут вид:

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad \dot{z} = 0; \tag{28'}$$

$$x = \dot{x}_0 t, \quad y = \frac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t, \quad z = 0, \tag{29'}$$

причем $\dot{x}_0 \geqslant 0$.

Из третьего уравнения (29′) непосредственно вытекает, что *движение тяжелого тела всегда происходит в одной плоскости, и именно в той вертикальной плоскости, которая содержит начальную скорость.*

Так как движение происходит в плоскости xy, то в системах уравнений (28′) и (29′) можно опускать последние уравнения.

Отметим еще следующее. Возвышая уравнения (28′) почленно в квадрат и складывая их, мы получим для квадрата скорости v тяжелого тела в любой момент движения формулы:

$$v^2 = v_0^2 + 2g\dot{y}_0 t + g^2 t^2,$$

которое в силу второго из уравнений (29′) можно написать в виде:

$$v^2 - v_0^2 = 2gy. \tag{30}$$

Эта последняя формула особенно замечательна, так как она устанавливает непосредственную зависимость, остающуюся в силе во всех случаях, между напряжением скорости тяжелого тела и высотой его поднятия (ср. гл. VIII; *интеграл живой силы*). *Именно, наращение квадрата скорости пропорционально высоте поднятия тяжелой точки над начальным ее положением.*

29. Исследуем сначала случай $\dot{x}_0 = 0$, т. е. *случай, когда начальная скорость* v_0 *вертикальна* (или, в частности, даже равна нулю). В таком предположении первое из уравнений (29′) принимает вид $x = 0$; мы отсюда заключаем, что движение будет *прямолинейным*, и именно, что оно будет проходить по вертикали y. Нам останется только рассмотреть два уравнения:

$$\dot{y} = gt + \dot{y}_0, \quad y = \frac{1}{2} gt^2 + \dot{y}_0 t, \tag{31}$$

из которых второе (путевое уравнение) нам показывает, что это движение *равномерно ускоренное* (рубр. 22).

Так как при принятой ориентации оси y ускорение имеет положительное значение, то наше движение, рассматриваемое на всем естественном протяжении времени, т. е. от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, является регрессивным (рубр. 22), т. е. направлено вверх *в фазе замедления* до *момента остановки*

$$t = -\frac{\dot{y}_0}{g}, \tag{32}$$

и *прогрессивным*, т. е. направлено вниз, в *фазе ускорения*. Но мы здесь намерены рассмотреть движение только начиная с момента $t=0$; вследствие этого мы приходим к необходимости различать два случая, в зависимости от знака числа $\dot{y}_0$.

Если $\dot{y}_0 \geqslant 0$, т. е. если начальная скорость направлена (вертикально) вниз или вовсе равна нулю, то момент остановки, для которого по формуле (32) $t \leqslant 0$, предшествует моменту $t=0$ или, в крайнем случае, совпадает с ним; вследствие этого движение в этот момент уже находится в стадии прогрессивно ускоренной. Мы заключаем отсюда, что точка, выходя из положения 0, неограниченно опускается вниз по вертикали равномерно ускоренным движением.

Если, напротив того, $\dot{y}_0 < 0$, т. е. если начальная скорость направлена вертикально вверх, то значение t, которое дает формула (32), оказывается больше нуля. Таким образом в момент $t=0$ движение оказывается еще в фазе замедленно регрессивной; начиная с момента $t=0$, точка поднимается вверх по вертикали равномерно замедленным движением до момента (32), в который она достигает наибольшей высоты

$$\frac{\dot{y}_0^2}{2g} \tag{33}$$

[абсолютное значение y в момент (32)]; затем она падает обратно вниз, двигаясь равномерно ускоренно. Таким образом в течение промежутка от момента $-\frac{\dot{y}_0}{g}$ до $-\frac{2\dot{y}_0}{g}$ она совершает обратный путь, приобретая в каждый момент скорость, которую она имела в той же точке при подъеме, только обращенную в обратную сторону (рубр. 22). Мы получаем, таким образом, отчетливую картину движения тела, брошенного вертикально вверх.

30. Нам остается рассмотреть случай, когда $\dot{x}_0 > 0$ и, следовательно, начальная скорость не направлена вертикально. Перепишем вновь уравнения (28′) и (29′), опуская излишние:

$$\dot{x} = \dot{x}_0, \quad \dot{y} = gt + \dot{y}_0; \tag{28′}$$

$$x = \dot{x}_0 t, \quad y = \frac{1}{2} g t^2 + \dot{y}_0 t. \tag{29′}$$

Рассматривая в системах (28′) и (29′) первые уравнения отдельно и отдельно же вторые, мы убеждаемся, что движение точки в этом случае можно считать составленным из двух движений: одного равномерного по оси x и другого равномерно переменного по оси y, которое принадлежит к типу, рассмотренному в предыдущей рубрике.

Если исключим t из двух уравнений (29′), то получим уравнение траектории:

$$y = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2 + \frac{\dot{y}_0}{\dot{x}_0} x; \tag{34}$$

она представляет собою параболу, ось симметрии которой направлена вертикально вниз.

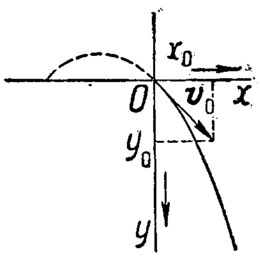
Заметим, далее, что скорость v ни в какой момент не может обратиться в нуль, так как ее горизонтальная слагающая $\dot{x}$ сохраняет постоянное значение $\dot{x}_0 > 0$. Наоборот, вертикальная компонента $\dot{y}$ обращается в нуль в момент

$$t = -\frac{\dot{y}_0}{g}. \tag{32}$$

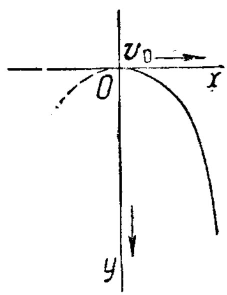
Напряжение скорости достигает в этот момент наименьшего своего значения $\dot{x}_0$; векторная же скорость становится в этот момент горизонтальной; поэтому касательная к траектории будет в этот момент также горизонтальной, и, следовательно, движущаяся точка находится в вершине параболы V. Это можно было предусмотреть, так как момент (32) явно представляет собою момент остановки равномерно переменного движения по оси y. Подставляя вместо t в уравнения (29′) значение (32), найдем координаты вершины параболы:

$$-\frac{\dot{x}_0\dot{y}_0}{g}, \quad -\frac{\dot{y}_0^2}{2g}. \tag{35}$$

Вторая из них никогда не может иметь положительного значения; иными словами, вершина параболы никогда не может оказаться ниже оси x.



Фиг. 38.



Фиг. 39.

Так как мы здесь, как и в предыдущем случае, намерены рассматривать движение только с момента $t = 0$, то мы должны и здесь различать два случая в зависимости от знака компоненты $\dot{y}_0$.

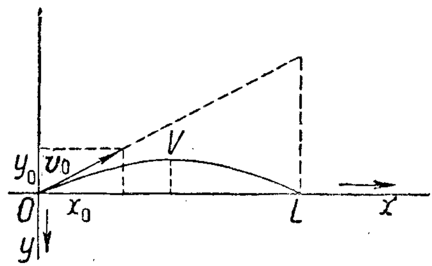
Если $\dot{y}_0 \geqslant 0$, т. е. если начальная скорость направлена наклонно вниз или же горизонтально (фиг. 38 и 39), то момент прохождения точки через вершину V параболы предшествует начальному моменту $t = 0$ или совпадает с ним (при $\dot{y}_0 = 0$). Следовательно, с этого момента и впредь точка описывает нисходящую дугу параболы с напряжением скорости, растущим от наименьшего начального своего значения v_0 по закону, выраженному формулой (30).

31. Интереснее случай $\dot{y}_0 < 0$, когда начальная скорость направлена наклонно вверх (фиг. 40).

В этом случае точка, начиная с момента $t = 0$, движется по восходящей ветви параболы до момента $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$, когда она достигает вершины параболы, а потому и наибольшей высоты над горизонталью x

$$\frac{\dot{y}_0^2}{2g}, \tag{36}$$

равной абсолютному значению ординаты (35) вершины V; оно совпадает, как это вполне естественно, с выражением (33) рубр. 29. В этой первой стадии движения напряжение



Фиг. 40.

скорости убывает вместе с y по формуле (30), так как в этом случае $\dot{y}_0 < 0$ [1]), в вершине параболы оно достигает своего минимума $\dot{x}_0$ (постоянная горизонтальная компонента скорости). С момента $t = -\frac{\dot{y}_0}{g}$ и впредь точка описывает нисходящую ветвь параболы со скоростью, напряжение которой неограниченно возрастает по закону (30). Она пересекает горизонталь x в точке L, симметричной O относительно оси параболы и потому имеющей абсциссу

$$-\frac{2\dot{x}_0\dot{y}_0}{g}, \tag{37}$$

вдвое превышающую абсциссу вершины параболы (35). А так как движение проекции точки на ось абсцисс происходит равномерно, то для прохождения дуги параболы OL требуется время

$$-\frac{2\dot{y}_0}{g}, \tag{38}$$

превышающее вдвое промежуток, за который она доходит до вершины V. Опускаясь по дуге VL, движущаяся точка имеет в каждый момент скорость, напряжение которой то же, что на этой же высоте по дуге OV, т. е. в точке, симметричной относительно оси параболы. Таким образом, в двух точках, расположенных симметрично относительно оси параболы, скорости также расположены по прямым, симметричным относительно оси, но они направлены вверх вдоль дуги OV и вниз на дуге VL.

---

[1]) Наглядно: точка подымается вверх, y принимает отрицательное значение, растущее по абсолютной величине .(*Ред.*)

32. Предыдущие соображения могут дать представления, правда, в первом приближении, о ходе движения снаряда, выпущенного из огнестрельного орудия. В этом случае обыкновенно выдвигается на первый план так называемый *угол вержения*, т. е. угол α (отсчитываемый положительно вверх), который ось жерла орудия, а следовательно, и начальная скорость снаряда, образует с горизонталью x. Тогда

$$\dot{x}_0 = v_0 \cos\alpha, \quad \dot{y}_0 = -v_0 \sin\alpha; \tag{33'}$$

уравнение же траектории принимает вид:

$$y = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2 - \operatorname{tg}\alpha\, x = \frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha} x^2 - x \operatorname{tg}\alpha. \tag{34'}$$

Дальность полета (по горизонтальной прямой) снаряда G, т. е. длина (37) хорды OL, будет равна:

$$G = \frac{2v_0^2 \sin\alpha\cos\alpha}{g} = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g}; \tag{37'}$$

высота выстрела, т. е. наибольший подъем снаряда (36), будет равна:

$$A = \frac{\dot{y}_0^2}{2g} = \frac{g}{8\dot{x}_0^2} G^2, \tag{36'}$$

и, наконец, *продолжительность полета снаряда* (38):

$$T = -\frac{2\dot{y}_0}{g} = \frac{2v_0}{g}\sin\alpha. \tag{38'}$$

Формула (37′) показывает, что наибольший пробег снаряда имеет место при $\alpha = 45^\circ$. В этом случае $G = \frac{v_0^2}{g}$, а продолжительность выстрела по формуле (38′) равна:

$$2\frac{v_0}{g}.$$

Прибавим, наконец, что под *опусканием* снаряда при абсциссе x разумеют расстояние между точкой траектории и точкой по касательной к ней в O, соответствующими абсциссе x. Так как уравнение этой касательной имеет вид:

$$y = -x \operatorname{tg}\alpha,$$

то мы находим, на основании соотношения (33′), что опускание $a(x)$ снаряда, соответствующее абсциссе x, по абсолютной величине имеет значение:

$$a(x) = \frac{g}{2\dot{x}_0^2} x^2$$

Если подставим в это выражение $x = G$ и полученный результат сравним с формулой (36′), то придем к выводу, что *высота полета составляет четверть опускания снаряда в конечной точке пробега.*

Следует, однако, упомянуть, что все эти численные результаты непосредственно не имеют никакого практического значения в баллистике, когда мы имеем дело с большими пробегами и выходим, таким образом, за пределы узкой окрестности, в которой можно придерживаться установленной здесь схемы явления.

При скоростях, развиваемых современным огнестрельным оружием, сопротивление воздуха коренным образом изменяет ход движения снаряда. Так, например, в случае ружейной пули, вылетающей с начальной скоростью в 625 *м/сек*, изложенная выше элементарная теория предусматривала бы (при угле вержения в 45°) наибольший пробег в 40 *км* и высоту в подъеме в 10 *км*; между тем, артиллеристы констатировали, что в действительности наибольший пробег снаряда достигается при угле вержения около 32° и мало превышает 3 *км*; высота же подъема, в среднем, не превышает 1 *км*.

7. Колебательные движения.

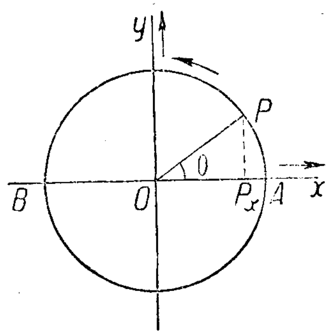
33. Равномерное круговое движение. Пусть точка P (фиг. 41) движется по окружности радиуса r, уравнение которой при совмещении начала координат с ее центром имеет вид:

$$x^2+y^2=r^2;$$

движение точки будет определено, коль скоро аномалия радиуса-вектора $\overline{OP}$ будет выражена в функции времени $\theta(t)$.

Уравнения движения будут (рубр. **19**):

$$x=r\cos\theta(t),\quad y=r\sin\theta(t),$$



Фиг. 41.

а скорость будет иметь компоненты:

$$\dot{x}=-r\dot{\theta}\sin\theta,\quad \dot{y}=r\dot{\theta}\cos\theta;$$

отсюда напряжение скорости

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}=r\,|\dot{\theta}|,$$

т. е. скорость точки P в любой момент равна произведению радиуса траектории r на абсолютную величину угловой скорости $\dot{\theta}$; это можно было предвидеть на основе рубр. **19**, поскольку в этом случае длина радиуса-вектора $\overline{OP}$ остается постоянной, радиальная скорость, таким образом, равна нулю, и скорость точки P сводится к поворотной ее слагающей.

Чтобы поэтому круговое движение было равномерным[1]), необходимо и достаточно, чтобы угловая скорость $\dot{\theta}$ имела посто-

[1]) То есть имело постоянную скалярную скорость. (*Ред.*)

янное значение. Если тогда обозначим через ω это постоянное значение $\dot{\theta}$, то

$$\theta = \omega t + \theta_0,$$

где θ_0 есть аномалия точки P в момент $t = 0$.

Отсюда следует, что *уравнения равномерного кругового движения* (при радиусе r и угловой скорости ω) имеют вид:

$$x = r\cos(\omega t + \theta_0), \qquad y = r\sin(\omega t + \theta_0). \tag{39}$$

В зависимости от того, имеет ли ω положительное или отрицательное значение, точка P движется в положительную сторону (в сторону возрастания аномалий) или в отрицательную. Компоненты скорости имеют значения:

$$\dot{x} = -r\omega\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega y, \qquad \dot{y} = r\omega\cos(\omega t + \theta_0) = \omega x. \tag{40}$$

Отсюда получаем компоненты ускорения

$$\ddot{x} = -\omega\dot{y} = -\omega^2 x, \qquad \ddot{y} = \omega\dot{x} = -\omega^2 y, \tag{41}$$

откуда

$$\boldsymbol{a} = -\omega^2 \overline{OP};$$

это означает, что ускорение имеет постоянное напряжение $\omega^2 r$ и всегда направлено от точки P к центру круга; это находится в полном согласии с результатами, установленными в рубр. 26, так как мы имеем здесь дело с равномерным движением, а потому ускорение должно быть целиком центростремительным.

За промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ точка P всегда возвращается в то же положение с тою же скоростью и с тем же ускорением, как это следует из формул (39), (40) и (41); это выражают в словах так, что равномерное круговое движение есть *периодическое движение с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$.

34. Гармоническое колебание. Возвращаясь к равномерному круговому движению точки P, рассмотрим движение проекции ее на один из диаметров, например, проекции P_x точки P на ось x. В то время как точка P в своем движении делает некоторое число оборотов по окружности, точка P_x совершает столько же *колебаний* от A до B, и обратно. Прямолинейное движение точки P_x называется *гармоническим колебанием*; оно имеет очень большое значение, так как дает кинематическое отображение самого важного типа многих физических колебательных явлений (упругих, звуковых, световых), когда можно пренебречь так называемыми пассивными сопротивлениями (трением, вязкостью, сопротивлением среды и т. п.). Существуют также явления (особенно в оптике и в теории электричества, например, в теории вращающихся магнитных полей), при которых физическое значение получают как колебательное движение точки P_x, так и равномерное вращение вектора $\overline{OP}$. Заметим, далее, что всякое периодическое движение может быть разложено на большее или меньшее число — иногда даже на бесконечно большое число — гармонических колебаний.

Уравнение гармонического движения имеет вид:

$$x = r\cos(\omega t + \theta_0) \tag{39_1}$$

[первое из уравнений (39) предыдущей рубрики]; его скорость и ускорение выражаются первыми из уравнений (40) и (41), именно:

$$\dot{x} = -r\omega\sin(\omega t + \theta_0) = -\omega y, \tag{40_1}$$

$$\ddot{x} = -\omega^2 x. \tag{41_1}$$

Гармоническое движение имеет ту же периодичность, что и соответствующее круговое движение; это значит, через промежуток времени $T = \frac{2\pi}{\omega}$ точка P_x всегда вновь проходит через то же положение с тою же скоростью и с тем же ускорением.

Промежуток времени T называется *периодом* гармонического колебания, а обратное число $\frac{1}{T}$ (т. е. число — целое, дробное или даже иррациональное — периодов, содержащихся в единице времени) называется *частотой* колебания; число же $\omega = \frac{2\pi}{T}$ называется *циклической* или *круговой частотой* — оно совпадает с угловой скоростью соответствующего кругового движения.

Наконец, бином $\omega t + \theta_0$ (аномалия соответствующего положения точки P) называется *фазой колебания в момент* t, а просто название *фазы* сохраняется за начальной фазой θ_0. В соответствии с этим, если сверх движения (39_1) рассматривается еще другое гармоническое движение:

$$x = r'\cos(\omega t + \theta_0'),$$

то говорят, что первое представляет по сравнению со вторым разность фаз $\theta_0 - \theta_0'$ (разность *предварения* или *отставания*, смотря по знаку). В качестве примера рассмотрим движение проекции той же точки P, совершающей круговое движение, на ось y; оно происходит по закону, выражающемуся путевым уравнением [второе из уравнений (39) предыдущей рубрики]:

$$y = r\sin(\omega t + \theta_0),$$

которому можно также придать вид:

$$y = r\cos\left(\omega t + \theta_0 - \frac{\pi}{2}\right);$$

мы можем поэтому сказать, что точка P_y, совершающая колебательное движение того же периода, что и P_x, представляет по сравнению с P_x разность фаз $-\frac{\pi}{2}$; это есть отставание на четверть периода, так как полный период соответствует разности фаз 2π.

Из предыдущего легко сделать и обратное заключение: два гармонические движения, происходящие по двум взаимно перпендикулярным прямым около точки их пересечения с одинаковым периодом и одинаковой амплитудой, но с разницей фаз в четверть периода, складываются в одно равномерное движение по окружности.

35. Из выражения (40), согласно которому скорость точки P_x при любом ее положении пропорциональна ординате соответствующей точки P, следует, что в точке A скорость колебания равна нулю и что она возрастает по абсолютной величине по мере того, как P_x приближается к *центру колебания* O, достигая в ней наибольшего напряжения ωr (фаза ускорения); затем ее напряжение уменьшается (фаза замедления) и вновь обращается в нуль в точке B; при движении же от B к A движущаяся точка имеет в каждой точке отрезка BA ту же скорость, что и при предыдущем прохождении через нее, только обращенную в противоположную сторону.

Так как, далее, соотношение (40_1) можно написать в виде:

$$\dot{x} = r\omega \cos\left(\omega t + \theta_0 + \frac{\pi}{2}\right),$$

то мы можем отсюда заключить, что скорость гармонических движений, в свою очередь, совершает гармонические же колебания с предварением на квадрант, т. е. на четверть периода по отношению к перемещению x.

Ускорение (41_1) всегда *направлено к центру колебаний и пропорционально расстоянию от него точки* P_x; таким образом оно достигает наибольшего своего абсолютного значения в точках A и B и обращается в нуль в центре. Оно также совершает гармонические колебания с предварением в полпериода по отношению к x.

Отметим, наконец, что (путевые) диаграммы колебательного движения точки, ее скорости и ускорения представляют собою синусоиды.

36. Вследствие соотношения (41_1) рубр. 34 в каждом гармоническом движении с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$ или, что то же, с циклической частотой ω, ускорение $\ddot{x}$ и абсцисса точки x в каждый момент связаны уравнением:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{41'}$$

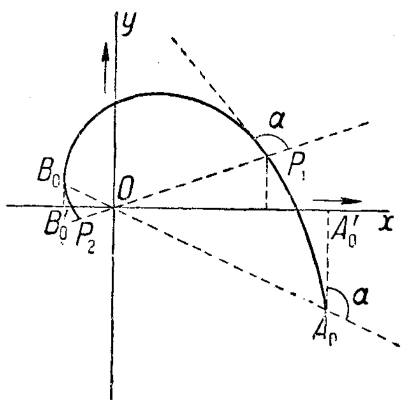
какова бы ни была амплитуда r и начальная фаза θ_0 рассматриваемого гармонического движения. Другими словами, функция от t

$$x = r\cos(\omega t + \theta_0), \tag{39_1}$$

какие бы ни были взяты значения постоянных r и θ_0, удовлетворяет диференциальному уравнению (41′); это обыкновенное диференциальное уравнение 2-го порядка, линейное и однородное, с постоянными коэфициентами.

Но из анализа нам хорошо известно, что диференциальное уравнение 2-го порядка допускает ∞^2 решений или *частных интегралов*, т. е., что *общий интеграл* такого диференциального уравнения *зависит от двух произвольных постоянных*. Отсюда мы заключаем, что выражение (39_1) представляет собою общий интеграл уравнения $(41')$, причем r и θ_0 суть произвольные постоянные; еще иначе, это означает, что диференциальное уравнение $(41')$ определяет все *гармонические движения с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$ (*с произвольной амплитудой и произвольной фазой*), *и только эти движения*.

37. Затухающие колебательные движения. Мы уже указали выше, что гармонические движения представляют наиболее простой тип *перманентных колебательных движений*, т. е. таких, в которых движущаяся точка через равные промежутки времени (*периоды*) принимает те же геометрические и кинематические признаки. Укажем теперь здесь же наиболее простой тип *затухающих* колебательных движений, т. е. таких, последовательные амплитуды которых уменьшаются, стремясь к нулю. Этого рода движения, как первичные элементы более сложных явлений, имеют не меньшее значение, чем гармонические: они, действительно, встречаются систематически при анализе естественных движений, имеющих колебательный характер, когда нужно принять во внимание пассивные влияния.



Фиг. 42.

Мы придем к этого рода колебательным движениям, если представим себе, что радиус-вектор точки P равномерно вращается (как и при гармоническом движении) вокруг неподвижной точки O, и при этом сокращается; характером этого сокращения определяется ход затухания рассматриваемого колебания. Мы остановимся на том случае, когда при вращении радиуса-вектора конечная его точка P описывает *логарифмическую спираль* с асимптотической точкой в центре вращения O.

Займемся прежде всего изучением движения свободного конца P радиуса-вектора при определенном таким образом его вращении. По отношению к обычной системе полярных координат с полюсом в точке O уравнение логарифмической спирали, асимптотически приближающейся к точке O с возрастанием аномалий (фиг. 42), имеет вид:

$$\rho = ae^{-b\theta}, \tag{42}$$

где a и b — произвольные положительные числа, e есть основание неперовых логарифмов (2,71828...).

Если вектор $\overline{OP}$ вращается в сторону возрастающих аномалий с постоянной угловой скоростью ω, то, как обыкновенно

$$\theta = \omega t + \theta_0, \tag{43}$$

где θ_0 есть аномалия в момент $t = 0$. Если положим

$$b\omega = h, \quad ae^{-b\theta_0} = r, \tag{44}$$

то уравнения движения будут:

$$x = re^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0), \quad y = re^{-ht} \sin(\omega t + \theta_0). \tag{45}$$

Следует отметить, что положения (44) вводят вместо постоянных a и b, имеющих чисто геометрические значения, выражения h и r, зависящие не только от a и b, но и от кинематических постоянных ω и θ_0. Соглашение о замене постоянных a и b через h и r носит чисто формальный характер, т. е. имеет в виду по возможности упростить явные выражения декартовых координат, как это видно из формул (45).

Возвратимся еще на момент к формуле (42). Двум значениям θ_1 и θ_2 аномалии θ, отличающимся на $\Delta\theta$, так что

$$\theta_2 - \theta_1 = \Delta\theta,$$

на логарифмической спирали отвечают радиусы-векторы ρ_1, ρ_2, отношение которых

$$q = \frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{-b\Delta\theta};$$

вследствие первого из соотношений (44) можно также написать:

$$q = e^{-\frac{h\Delta\theta}{\omega}}. \tag{46}$$

Отсюда вытекает для логарифмической спирали вывод, что значениям аномалии θ, нарастающим в арифметической прогрессии с постоянной разностью $\Delta\theta$, соответствуют значения радиуса-вектора ρ, изменяющиеся в геометрической прогрессии, знаменатель которой связан с $\Delta\theta$ соотношением (46).

Особый интерес представляют следующие частные случаи:

$$\Delta\theta = \frac{\pi}{2}, \quad \Delta\theta = \pi, \quad \Delta\theta = 2\pi.$$

Мы будем исходить для определенности от точки X_1 спирали, лежащей на положительной полуоси Ox. Двигаясь по спирали, начиная от точки X_1, таким образом, чтобы радиус-вектор поворачивался каждый раз на 90°, мы придем последовательно к пересечениям кривой: с положительной полуосью Oy — в точке Y_1, с продолжением полуоси Ox — в точке Ξ_1, с продолжением полуоси Oy — в точке H_1, вновь с осью Ox —

в точке X_2 и т. д. Радиусы-векторы этих пересечений убывают в геометрической прогрессии по формуле (46) в отношении

$$q = e^{-\frac{h\pi}{2\omega}}.$$

При $\Delta\theta = \pi$ мы будем иметь дело с последовательными пересечениями спирали с осью абсцисс в точках $X_1, \Xi_1, X_2, \Xi_2, \ldots,$ попеременно то с одной стороны, то с другой стороны точки O; знаменателем прогрессии будет служить $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$.

Наконец, при $\Delta\theta = 2\pi$ речь идет о последовательных пересечениях кривой с положительной полуосью Ox в точках $X_1, X_2, X_3, \ldots,$ причем знаменателем прогрессии, в которой будет убывать радиус-вектор, служит:

$$q = e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}.$$

Заметим, далее, что так как в движении по спирали, которое мы рассматриваем, изменение θ, ввиду (43), является равномерным, то постоянным промежуткам времени Δt соответствуют для θ интервалы $\Delta\theta = \omega\Delta t$, также постоянные. Если мы поэтому будем рассматривать моменты, отделенные друг от друга постоянным промежутком времени продолжительности Δt, то аномалии последовательных положений точки, движущейся по спирали, будут по формуле (46) убывать в постоянном отношении

$$q = e^{-h\Delta t}. \tag{46'}$$

38. Диференцируя эти уравнения по t, мы отсюда получим:

$$\dot{x} = re^{-ht}\left[-h\cos(\omega t + \theta_0) - \omega\sin(\omega t + \theta_0)\right],$$

$$\dot{y} = re^{-ht}\left[-h\sin(\omega t + \theta_0) + \omega\cos(\omega t + \theta_0)\right],$$

и, следовательно:

$$\dot{x} = -hx - \omega y, \quad \dot{y} = -hy + \omega x. \tag{47}$$

После вторичного диференцирования получим:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} &= -h\dot{x} - \omega\dot{y} = (h^2 - \omega^2)\,x + 2h\,\omega y, \\ \ddot{y} &= -h\dot{y} + \omega\dot{x} = (h^2 - \omega)\;y - 2h\,\omega x. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Отсюда получаем для квадратов (скалярной) скорости и скалярного ускорения значения:

$$v^2 = (h^2 + \omega^2)\,(x^2 + y^2) = (h^2 + \omega^2)\rho^2,$$

$$a^2 = (h + \omega^2)^2\,(x^2 + y^2) = (h^2 + \omega^2)^2\rho^2.$$

Мы видим отсюда, что *скорость и ускорение точки P убывают таким же образом, как и радиус-вектор $\rho = OP$; в частности, когда t неограниченно возрастает, они стремятся к нулю, как $\rho = e^{-ht}$*; это выражение для ρ вытекает из соотношений (42), (43) и (44).

Так как, далее,

$$\frac{x}{\rho},\ \frac{y}{\rho}$$

суть направляющие косинусы радиуса-вектора $\overline{OP}$, а вследствие предыдущего выражения для v

$$\frac{\dot{x}}{v}=\frac{\dot{x}}{\rho\sqrt{h^2+\omega^2}},\quad \frac{\dot{y}}{v}=\frac{\dot{y}}{\rho\sqrt{h^2+\omega^2}}$$

суть направляющие косинусы скорости точки P (касательной к траектории в точке P), то угол α между этими направлениями дается выражением:

$$\cos\alpha=\frac{x\dot{x}+y\dot{y}}{\rho^2\sqrt{h^2+\omega^2}},$$

или вследствие соотношения (47):

$$\cos\alpha=-\frac{h}{\sqrt{h^2+\omega^2}},$$

или же, еще проще,

$$\operatorname{tg}\alpha=-\frac{\omega}{h}\ ^{1)}.$$

Так как угол α оказывается *постоянным* (т. е. не зависящим от времени), то мы этим путем получаем хорошо известное свойство логарифмической спирали, что она *встречает под одним и тем же углом прямые, выходящие из асимптотической точки O.*

Через точку O проведем во втором и четвертом квадрантах осевого креста прямую OA_0, образующую с осью x угол $\alpha-\frac{\pi}{2}$; *в каждой точке пересечения A_0 этой прямой со спиралью касательная к последней будет перпендикулярна к оси x* (см. предыдущий рисунок), и других точек, обладающих этим свойством, очевидно, не будет. Для определенности предположим, что точка A_0 лежит в четвертом квадранте, и обозначим через A_1, $A_2,\ldots$ последовательные пересечения спирали с отрезком OA_0, считая от A_0 в сторону O [2]; через $B_0, B_1, B_2,\ldots$ обозначим пересечения тех же завитков с лучом, обращенным в противоположную сторону.

Из соображений, изложенных в рубр. 37, следует, что отрезки OA_0, OB_0, OA_1, $OB_1,\ldots$ образуют убывающую гео-

---

[1]) Нужно иметь в виду, что при принятом нами предположении спираль стремится к центру O в сторону возрастающих аномалий; поэтому угол α всегда тупой.

[2]) Продолжение отрезка OA_0 пересечет спираль в еще бесчисленном множестве других точек, которые можно было бы обозначить через A_{-1}, $A_{-2},\ldots$; им соответствуют пересечения с теми же завитками точки B_{-1}, $B_{-2},\ldots$ Но для определенности мы здесь рассматриваем движение точки P, начиная с момента, когда она находится в A_0.

метрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\frac{h\pi}{\omega}} < 1$ и потому стремятся к нулю.

39. Установив все это, будем теперь совместно с движением точки P по логарифмической спирали, которое мы изучали до сих пор, рассматривать также движение ее проекции P_x на ось x. Точка P_x, очевидно, совершает колебания; если будем рассматривать движение точки P, начиная с положения A_0, то крайними точками последовательных колебаний, или *местами остановки* точки P_x, будут проекции A_0', B_0', A_1', $B_1', \ldots$ точек A_0, B_0, A_1, $B_1, \ldots$ спирали на ось x, ибо в этих точках скорость точки P всегда перпендикулярна к оси x, а потому скорость проекции равна нулю. Отрезки OA_0', OB_0', OA_1', $OB_1', \ldots$ (амплитуды последовательных полуколебаний), совпадающие с абсциссами последовательных пересечений A_0, B_0, A_1, $B_1, \ldots$ спирали с той же прямой, проходящей через начало, образуют, как мы видели в предыдущей рубрике, геометрическую прогрессию со знаменателем $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$, а поэтому стремятся к нулю; этим оправдывается название *затухающего колебательного движения*, которое присваивается движению точки P_x.

Уравнением затухающего колебательного движения будет служить первое из уравнений (45), именно:

$$x = re^{-ht}\cos(\omega t + \theta_0). \tag{45$_1$}$$

Так как вектор $\overline{OP}$ вращается равномерно, то совершенно ясно, что между двумя последовательными прохождениями точки P_x через полюс O протекает промежуток времени *постоянной продолжительности* $\frac{\pi}{\omega}$ (необходимой для того, чтобы увеличить на π аномалию $\omega t + \theta_0$ точки P) и что $\frac{\pi}{\omega}$ представляет собою постоянную продолжительность каждого *простого колебания*, протекающего между последовательными положениями A_0 и B_0, B_0 и A_1 и т. д. [1]). Поэтому будет также постоянной и равной $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и продолжительность каждого *полного* колебания (от A_0' до A_1', от B_0' до B_1', от A_1' до A_2' и т. д.). Эта постоянная продолжительность полных колебаний называется

[1]) Нужно заметить, между прочим, что интервал простого колебания, скажем, например, $A_i'\,B_i'$, не делится моментом прохождения точки через полюс O пополам. Это становится очевидным, если заметим, что при равномерном вращении вектора $\overline{OP}$ аномалии, соответствующие положениям A_i' и B_i', сравнимы по модулю 2π соответственно с $\alpha - \frac{\pi}{2}$ и с $\alpha + \frac{\pi}{2}$, тогда как аномалии в точке O всегда сравнимы с $\frac{\pi}{2}$.

периодом затухающих колебаний, хотя совершенно ясно, что это движение не носит периодического характера (помимо постоянства продолжительности колебания).

Чтобы точнее выразить кинематические изменения, которые происходят в движении точки P_x за период $T=\frac{2\pi}{\omega}$, обратимся вновь к точке P; припомним, что за промежуток $\frac{\pi}{\omega}$, т. е. за *полупериод* $\frac{T}{2}$, как координаты точки P, так и компоненты ее скорости и ускорения меняют знак, абсолютное же их значение убывает пропорционально в отношении $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$. Если примем во внимание, что P_x есть проекция точки P на ось абсцисс и что ее скоростью и ускорением служат проекции на ту же ось скорости и ускорения точки P, и объединим эффект, происходящий в течение двух последовательных полупериодов, т. е. в течение полного периода $T=\frac{2\pi}{\omega}$, то мы придем к заключению, что за *промежуток времени* $T=\frac{2\pi}{\omega}$ *расстояние точки* P_x *от полюса, а также соответствующие скорость и ускорение пропорционально снижаются (без изменения знака) в отношении* $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$ *по сравнению с первоначальным их значением.*

Таким образом каждый промежуток времени T приносит с собою, так сказать, сокращение (затухание) всех характерных элементов движения в отношении $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$.

Как абсциссы, так и скорости и ускорения точки P_x, вычисленные для последовательных моментов, следующих друг за другом через промежутки в период или полупериод, образуют *убывающие геометрические прогрессии*, соответственно со знаменателями $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$ или $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$; натуральные логарифмы их образуют *арифметические прогрессии* с разностью соответственно $-\frac{2h\pi}{\omega}$ и $-\frac{h\pi}{\omega}$. Поэтому число $\frac{h\pi}{\omega}$ называется *логарифмическим декрементом этого колебательного движения* (относительно полупериода). Чем меньше декремент, тем менее заметно затухание, так как тем ближе становятся к единице коэфициенты сокращения $e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}$ и $e^{-\frac{h\pi}{\omega}}$. Если $\frac{h\pi}{\omega}=0$, т. е. если $h=0$, то затухающее колебательное движение обращается в гармоническое колебание, как это непосредственно усматривается из уравнения (45_1). Заметим, наконец, что логарифмический декремент можно также представить в виде:

$$\frac{h\pi}{\omega}=\frac{hT}{2},$$

откуда следует также, что

$$e^{-\frac{2h\pi}{\omega}}=e^{-hT}.$$

40. Если фиксируем некоторый момент $t=t_1$, то движение, определяемое уравнением

$$x=re^{-ht_1}\cos(\omega t+\theta_0),$$

называется по отношению к затухающему движению (44_1) *тангенциальным гармоническим движением* [1]), соответствующим моменту t_1.

Ясно, что такое движение проекции P_x точки P на ось абсцисс имело бы место, если бы точка P с момента t_1 стала двигаться не по спирали, а по окружности, и притом равномерно с угловой скоростью ω. Этим тангенциальным гармоническим движением особенно удобно пользоваться, когда h очень мало, так как в течение нескольких периодов показательная функция e^{-ht} сохраняет приблизительно постоянное значение, которое можно считать равным e^{-ht_1}. Когда это имеет место, в показателе можно пренебречь произведением hT, даже умноженным на целое число n, соответствующее нескольким оборотам. В интервале от t_1-nT до t_1+nT всякий момент t можно представить в виде $t=t_1+\alpha nT$, где α — правильная дробь (положительная или отрицательная); вместе с тем

$$re^{-ht}=re^{-ht_1-\alpha nhT},$$

а так как числом $-\alpha nhT$ можно пренебречь, то

$$re^{-ht}=re^{-ht_1}=\text{const}.$$

Поскольку e^{-ht} можно на протяжении нескольких колебаний заменить через e^{-ht_1}, постольку затухающее движение можно в течение этого промежутка времени считать совпадающим с соответствующим тангенциальным его приближением; как велик промежуток, на котором такую замену можно делать с достаточным приближением, об этом можно судить только в каждом отдельном случае.

В выражении амплитуды re^{-ht} тангенциального гармонического движения, соответствующего произвольно взятому моменту t, показатель $-ht$ выявляет затухание; поэтому число h назы-

---

[1]) Подобно тому как касательная (тангенциальная прямая) есть прямая, имеющая с кривой в данной точке то же направление, так тангенциальное движение есть такое *гармоническое* движение, состояние которого в рассматриваемый момент совпадает с состоянием действительного движения. (*Ред.*)

вается *постоянной затухания.* Из предыдущего следует, что затухание нужно считать малым, когда оказывается незначительным (т. е. меньше обратного значения $\frac{1}{n}$ достаточно большого целого числа n) произведение hT. Обратное значение $\frac{1}{h}$ числа h называется временем *падения колебания;* оно выражает время, в течение которого амплитуда соответствующего тангенциального гармонического движения уменьшается в отношении 1 к $\frac{1}{e}$; в самом деле

$$re^{-h\left(t+\frac{1}{h}\right)}=\frac{1}{e}\,re^{-ht}.$$

41. Теоретически затухающие колебания не угасают никогда. Но на практике, если возьмем такое положительное число τ, при котором произведением $h\tau$ уже можно пренебречь [1]), то достаточно будет взять $t>\frac{1}{\tau}$, чтобы можно было пренебречь расстоянием движущейся точки от полюса O. Таким образом, на практике с момента $t=\frac{1}{\tau}$ точку P можно будет считать уже неподвижной (относительно осей координации).

42. Возвратимся к последним уравнениям (47) рубр. 37.

$$\dot{x}=-hx-\omega y,\quad \dot{y}=-hy+\omega x. \tag{47}$$

Исключая отсюда y, получим:

$$\omega\dot{y}=h\dot{x}+(h^2+\omega^2)\,x.$$

Если теперь продиференцируем первое из уравнений (47) и в полученное уравнение

$$\ddot{x}=-h\dot{x}-\omega\dot{y}$$

подставим найденное сейчас выражение для $\omega\dot{y}$, то получим уравнение:

$$\ddot{x}+2h\dot{x}+(h^2+\omega^2)\,x=0, \tag{49}$$

которое связывает абсциссу, скорость и ускорение обычного нашего затухающего колебательного движения:

$$x=re^{-ht}\cos(\omega t+\theta_0). \tag{45_1}$$

Эта функция времени удовлетворяет диференциальному уравнению (49); а так как это уравнение 2-го порядка, то выражение (45_1) представляет собою его общий интеграл *с произволь-*

---

[1]) В том смысле, что оно дает неразличимые при помощи наших инструментов результаты. (*Ред.*)

ными постоянными r и θ_0. Иными словами, *линейное однородное диференциальное уравнение 2-го порядка:*

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)x = 0,$$

где h *и* ω *суть два данных положительных числа, определяет все затухающие колебательные движения с периодом* $\frac{2\pi}{\omega}$ *и постоянной затухания* h.

Как этого и следовало ожидать, при $h=0$ уравнение (49) обращается в диференциальное уравнение (41′) гармонического движения (рубр. 36).

43. Движения, определяемые однородным линейным диференциальным уравнением 2-го порядка с постоянными коэфициентами. Следуя указанию, к которому, естественно, приводят предыдущие результаты, поставим себе теперь обратную задачу — исследовать вообще все те движения, при которых между абсциссой (криволинейной, если движение не прямолинейное), скоростью (скалярной) и ускорением (касательным) существует соотношение, выражаемое линейным однородным диференциальным уравнением с постоянными коэфициентами:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + kx = 0. \qquad (50)$$

Этого рода движения постоянно встречаются в различного рода вопросах механики и физики.

Начнем с того, что возобновим в памяти некоторые основные теоремы анализа, относящиеся к этого рода уравнениям. Диференциальное уравнение 2-го порядка, линейное и однородное относительно неизвестной функции x от независимой переменной t, всегда допускает два решения: $x_1(t)$ и $x_2(t)$, линейно независимые, т. е. такие, отношение которых не сводится к постоянному числу; общий интеграл уравнения выражается в этом случае суммой:

$$c_1x_1(t) + c_2x_2(t),$$

где c_1 и c_2 суть произвольные постоянные.

Если такое уравнение имеет постоянные коэфициенты, как в случае (50), мы ищем решение вида $e^{\varepsilon t}$, где ε означает постоянную; если это выражение подставим в уравнение (50), то оно принимает вид:

$$e^{\varepsilon t}(\varepsilon^2 + 2h\varepsilon + k) = 0;$$

откуда следует, что постоянная ε должна удовлетворять алгебраическому уравнению 2-й степени:

$$\varepsilon^2 + 2h\varepsilon + k = 0. \qquad (51)$$

Если это уравнение имеет два различные корня ε_1 и ε_2, т. е. если $h^2 \neq k$, то мы, таким образом, получаем два частных решения $e^{\varepsilon_1 t}$ и $e^{\varepsilon_2 t}$, так что общий интеграл выражается суммой

$$c_1e^{\varepsilon_1 t} + c_2e^{\varepsilon_2 t}. \qquad (52)$$

Если же, напротив $h^2 = k$, так что уравнение (51) имеет двойной корень $-h$, то этим путем мы находим только одно частное решение e^{-ht}; но мы очень легко обнаруживаем непосредственной подстановкой, что в этом случае уравнение удовлетворяет также выражению te^{-ht} так что общий интеграл в этом случае имеет вид:

$$(c_1 + c_2 t)\, e^{-ht} \tag{53}$$

44. Установив все это, займемся исследованием движений, определяемых уравнением (50); и прежде всего разберем случай $h = 0$, который очень часто встречается, как мы в этом убедимся впоследствии, особенно при исследовании наиболее элементарных проблем устойчивости движения.

Если не только h, но и k обращается в нуль, то уравнение (50) принимает вид $\ddot{x} = 0$ и выражает совокупность ∞^2 равномерных движений. Если $k > 0$, то мы можем положить $k = \omega^2$ и вновь приходим к уравнению:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0,$$

характеризующему гармонические движения (рубр. 36).

Остается случай $k < 0$; полагая тогда $k = -\omega^2$, мы приведем уравнение (49) к виду:

$$\ddot{x} - \omega^2 x = 0;$$

соответствующее характеристическое уравнение $\varepsilon^2 - \omega^2 = 0$ допускает в этом случае два противоположные корня $\pm\omega$; общий интеграл диференциального уравнения принимает поэтому вид:

$$x = c_1 e^{\omega t} + c_2 e^{-\omega t}. \tag{52'}$$

Для движения, определяемого путевым уравнением этого вида, скорость выражается формулой:

$$\dot{x} = \omega\,(c_1 e^{\omega t} - c_2 e^{-\omega t}) = \omega e^{-\omega t}\,(c_1 e^{2\omega t} - c_2).$$

В этом выражении производной $\dot{x}$ множитель $e^{-\omega t}$ при всяком конечном t имеет положительное значение, отличное от нуля; выражение же, стоящее в скобках, производная которого $2c_1\omega e^{2\omega t}$ с изменением t никогда не меняет своего знака, постоянно возрастает или постоянно убывает; поэтому оно может обратиться в нуль не более одного раза. Это имеет место при условии $c_1 \neq 0$ и $c_2/c_1 > 0$ для значения

$$t = \frac{1}{2\omega} \ln \frac{c_2}{c_1}$$

В рассматриваемом случае скорость в этот момент обращается в нуль и меняет знак, т. е. сторона, в которую обращено движение, изменяется: точка после остановки движется в обратную сторону.

Формула (52) показывает, что при $t \to \infty$ x стремится к бесконечности того же знака, что и c_1, если $c_1 \neq 0$, и к нулю, если $c_1 = 0$; при $t \to -\infty$ c_1 стремится к бесконечности знака c_2, если $c_2 \neq 0$, и к нулю, если $c_2 = 0$. Таким образом в общем случае (т. е. при $c_1 c_2 \neq 0$) движущаяся точка идет из бесконечности и вновь удаляется в бесконечность, либо меняя при этом сторону, в которую движение обращено, либо не меняя ее. В частных же случаях при $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$ точка приходит с бесконечно удаленного расстояния и неограниченно приближается к началу (*асимптотическое затухание*); или же выходит из окрестности, непосредственно примыкающей к началу, и уходит на неограниченно большое расстояние; в том и другом случае сторона, в которую движение обращено, при этом не меняется.

Таким образом, при $k < 0$ мы всегда имеем дело с *непериодическим движением*.

45. Исчерпав, таким образом, случай $h = 0$, обратимся к общему случаю, когда $h \neq 0$. Прежде всего, остановимся на тех движениях, которые соответствуют отрицательным значениям h. Если положим $h = -h_1$, то уравнение примет вид:

$$\ddot{x} - 2h_1\dot{x} + hx = 0. \tag{50'}$$

Теперь произведем преобразование независимой переменной, полагая

$$t_1 = -t.$$

Так как при этом

$$\dot{x} = -\frac{dx}{dt_1} \quad \text{и} \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt_1^2},$$

то преобразованное уравнение примет вид:

$$\frac{d^2x}{dt_1} + 2h_1\frac{dx}{dt_1} + kx = 0, \tag{50''}$$

в котором коэфициент при $\frac{dx}{dt_1}$ имеет положительное значение. Общий интеграл уравнения (50′) получим, заменив в интеграле уравнения (50″) t_1 через $-t$; интерпретируя это кинематически, можно сказать, что каждое движение, определяемое уравнением (50′), получается, если в некотором движении, определяемом уравнением (50″), обратим естественную последовательность моментов времени (*обращенное движение*). Вследствие этого, в конечном счете, желая исследовать все возможные движения вида (50), достаточно будет подвергнуть непосредственному изучению случай $h > 0$, а затем для каждого полученного таким путем движения необходимо будет рассмотреть также соответствующее обращенное движение.

46. Однако, и в этом исследовании нам придется рассмотреть отдельно три случая в зависимости от того, будет ли $h^2 < k$, $h^2 > k$ или $h^2 = k$.

A) $h^2 < k$ (что предполагает $k > 0$).

Если в этих предположениях положим

$$k - h^2 = \omega^2,$$

то уравнение (50) примет вид:

$$\ddot{x} + 2h\dot{x} + (h^2 + \omega^2)\, x = 0.$$

Мы уже знаем (рубр. 42), что это диференциальное уравнение характеризует при $h > 0$ затухающие колебательные движения с постоянной затухания h и периодом $\frac{2\pi}{\omega}$. Случай $h < 0$, который здесь является новым, соответствует обращенным движениям затухающих колебаний, которые можно назвать *развертывающимися колебаниями.*

Впрочем нетрудно непосредственно получить путевые уравнения этих различных движений, исходя из общих положений, приведенных в рубр. 43. При условии $h^2 < k$ оба корня ε_1 и ε_2 уравнения (51) будут комплексными (при любом h) и именно

$$\varepsilon_1 = -h + \omega i, \quad \varepsilon_2 = -h - \omega i,$$

где i, по обыкновению, означает мнимую единицу. Поэтому оказываются сопряженно комплексными и два частные решения:

$$e^{\varepsilon_1 t} = e^{-ht}\, e^{i\omega t} \quad \text{и} \quad e^{\varepsilon_2 t} = e^{-ht}\, e^{-i\omega t},$$

линейная комбинация которых с произвольными постоянными коэфициентами дает общий интеграл диференциального уравнения рассматриваемых движений. Но так как путевые уравнения движения непременно должны быть вещественными, то этими коэфициентами нужно распорядиться таким образом, чтобы упомянутая линейная комбинация была вещественной. Для этой цели им достаточно приписать сопряженные комплексные значения, т. е. положить:

$$c_1 = \frac{1}{2} r e^{i\theta_0}, \quad c_2 = \frac{1}{2} r e^{-i\theta_0},$$

где r и θ_0 суть произвольные вещественные числа. Тогда общий интеграл примет вид:

$$x = \frac{1}{2} r e^{-ht} \left\{ e^{i(\omega t + \theta_0)} + e^{-i(\omega t + \theta_0)} \right\},$$

т. е. по известной формуле Эйлера [1]:

$$x = r e^{-ht} \cos(\omega t + \theta_0);$$

[1] Леонард Эйлер (Leonard Euler) родился в Базеле в 1707 г., умер в Петербурге в 1783 г., был директором сначала Берлинской, а затем Петербургской академии наук. Эйлер был одним из самых плодотворных математиков всех времен не только в области чистого анализа, но и в его приложениях к математике. механике и к весьма разнообразным вопросам техники.

это путевое уравнение, совпадающее при $h > 0$ с уравнениями затухающих колебаний, дает при $h < 0$ путевое уравнение развертывающихся колебаний.

В) $h^2 > k$.

При этом предположении алгебраическое уравнение (51) имеет два различные вещественные корня:

$$\varepsilon_1 = -h + \sqrt{h^2 - k}, \quad \varepsilon_2 = -h - \sqrt{h^2 - k},$$

а следовательно, общий интеграл диференциального уравнения дается непосредственно в вещественном виде линейной комбинацией:

$$x = c_1 e^{\varepsilon_1 t} + c_2 e^{\varepsilon_2 t} \tag{52}$$

с вещественными коэфициентами c_1 и c_2. Соображения, совершенно аналогичные тем, которые сделаны в рубр. 44, обнаруживают, что всякое движение, определяемое путевым уравнением этого типа, необходимо является *апериодическим*. Сторона, в которую движение обращено, при этом меняется не более одного раза; это происходит в момент

$$t = \frac{1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \ln \left(-\frac{c_2 \varepsilon_2}{c_1 \varepsilon_1} \right)$$

при условиях $c_1 \varepsilon_1 \neq 0$, $c_2 \varepsilon_2 / c_1 \varepsilon_1 < 0$.

Чтобы с большею точностью представить ход этого движения, целесообразно различать здесь ряд отдельных случаев. Принимая, как мы это установили в предыдущей рубрике, $h > 0$, заметим, что с этим положением (в связи с исходным $h^2 > k$) совместимы три случая: $k > 0$, $k < 0$ и $k = 0$.

Если $h^2 > k$, $h > 0$, $k > 0$ — это случай, наиболее интересный по своим физическим приложениям,— то оба корня уравнения (51) будут отрицательными, и при этом $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$. При этих условиях, представив выражение (52) в виде:

$$x = \left(c_1 e^{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) t} + c_2 \right) e^{\varepsilon_2 t},$$

легко убеждаемся, что при $t \to -\infty$ x стремится к бесконечности (имеющей знак числа c_2, если $c_2 \neq 0$, и знак числа c_1, если $c_2 = 0$). Таким образом в этом случае движущаяся точка всегда приходит из бесконечности (меняя сторону, в которую обращено движение, или не меняя ее) и стремится к определенному положению на конечном расстоянии (*асимптотическое затухание движения*).

Если $h^2 > k$, $h > 0$, а $k < 0$, то корни ε_1 и ε_2 имеют противоположные знаки, и именно $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_2 < 0$. В этом случае выражение (52) непосредственно обнаруживает, что при $t \to +\infty$ x стремится к бесконечности знака числа c_1, если $c_1 \neq 0$, и к нулю, если $c_1 = 0$. При $t \to -\infty$ x стремится к бесконечности знака c_2, если $c_2 \neq 0$, и к нулю, если $c_2 = 0$. Таким образом в рассматриваемых условиях точка вообще (т. е. при $c_1 c_2 \neq 0$) приходит из бесконечности и уходит в бесконечность в ту же сторону, откуда пришла, или же в обратную сторону (т. е. меняя на пути сторону движения или не меняя ее); в частности, однако, при $c_1 = 0$ или $c_2 = 0$ движение либо приводит точку из бесконечности и асимптотически затухает у некоторой определенной точки траектории, либо же из непосредственной близости к некоторой определенной точке уводит ее в бесконечность.

Наконец, если $h > 0$, а $k = 0$ (требование $h^2 > k$ при этом удовлетворяется само собой), то

$$\varepsilon_1 = 0, \ \varepsilon_2 = -2h;$$

общий интеграл имеет вид:

$$x = c_1 + c_2 e^{-2ht},$$

и мы видим непосредственно, что (за исключением случая $c_2 = 0$, приводящего к покою) движущаяся точка приходит из бесконечности знака c_2 и асимптотически приближается к положению, соответствующему абсциссе c_1.

При $h < 0$ (и, конечно, $h^2 > k$) мы получаем обратные движения рассмотренных сейчас типов, и возвращаться к ним бесполезно.

C) $h^2 = k$, что уже влечет за собою $k > 0$, за исключением исчерпанного уже случая $h = k = 0$.

Это положение можно рассматривать как предельный случай положения B, уже рассмотренного выше; и отсюда уже можно предусмотреть, что мы имеем здесь дело с непериодическими движениями. Чтобы установить это непосредственно, заметим, что путевое уравнение в этом случае имеет вид (рубр. 42):

$$x = (c_1 + c_2 t) e^{-ht}; \tag{53}$$

поэтому скорость выражается формулой:

$$\dot{x} = (c_2 - hc_1 - hc_2 t) e^{-ht},$$

из которой видно, что при $c_2 = 0$ (или, конечно, при $h = 0$) она вовсе не обращается в нуль, а при $c_2 \neq 0$ и $h \neq 0$ она обращается в нуль только один раз при

$$t = \frac{c_2 - hc_1}{hc_2}.$$

Что касается хода движения в далеком прошлом или в отдаленном будущем, то при $h > 0$, как видно из формулы (53), при $t \to -\infty$ x стремится к бесконечности со знаком числа $-c_2$, если $c_2 \neq 0$, и со знаком c_1, если $c_2 = 0$; применяя же к выражению (53) правило де-Лопиталя [1]), находим, что во всяком случае

$$\lim_{\to\infty} x = -\lim_{t\to\infty} hc_2 e^{-ht} = 0.$$

---

[1]) Вильгельм Франциск де-Лопиталь (G. F. de l'Hopital, часто пишут Hôpital) родился в Париже в 1661 г. и там же умер в 1704 г. В молодости он был кавалерийским офицером, но затем отдался всецело научным занятиям и до-

Таким образом, мы при этих условиях всегда имеем апериодическое движение, причем движущаяся точка приходит из бесконечности и асимптотически приближается к началу, изменив не более одного раза сторону, в которую движение обращено.

При $h < 0$ получаются движения, обращенные по сравнению с теми, которые только что были рассмотрены.

8. Центральные движения. Кеплеровы движения.

47. Движение точки называется *центральным*, если прямая действия ускорения во всякий момент (конечно, когда это имеет смысл, т. е. когда оно отлично от нуля) проходит через постоянную точку O, называемую *центром движения*.

Иначе, это определение выражает, что радиус-вектор $\overline{OP}$ и ускорение a коллинеарны, так что момент ускорения относительно точки O $[\overline{OP}a]$ равен нулю.

И, обратно, если оказывается, что векторное произведение $[\overline{OP}a] = 0$, то движение является центральным. Мы знаем, в самом деле, из теории векторов, что момент вектора a, приложенного в точке P, относительно точки O, равен нулю, либо когда сам вектор a равен нулю, либо когда он проходит через точку O. Таким образом, *векторная характеристика центрального движения* заключается в том, что во все время движения

$$[\overline{OP}a] = 0. \tag{54}$$

48. Из соотношения (54) непосредственно следует, что *вектор секториальной скорости всякого центрального движения относительно центра движения O является постоянным.*

В самом деле, припомним, что секториальная скорость движения относительно центра O отличается только множителем $\frac{1}{2}$ от векторного произведения $[\overline{OP}v]$. С другой стороны, диференцируя это произведение по времени, получим:

$$\frac{d}{dt}[\overline{OP}v] = [\dot{\overline{OP}}v] + [\overline{OP}\dot{v}].$$

Так как, далее (I, рубр. 65 и II, рубр. 13)

$$\dot{\overline{OP}} = \dot{P} = v,$$

то

$$[\dot{\overline{OP}}v] = [v\ v] = 0,$$

стиг звания члена Парижской академии наук. Сочинение, в котором содержится правило, носящее его имя, было в первый раз опубликовано в Париже в 1696 г. и носит название „Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes“ („Анализ бесконечно малых для исследования кривых линий“).

а потому

$$\frac{d}{dt}[\overline{OP}v] = [\overline{OP}\dot{v}] = [\overline{OP}a]; \tag{55}$$

эта производная обращается, следовательно, для центрального движения в нуль. Отсюда следует, что

$$[\overline{OP}v] = c, \tag{56}$$

где c — вектор постоянный по величине и положению, — двойной вектор секториальной скорости центрального движения.

Можно прибавить, что *уравнение* (56) *так же, как и* (54), *является характерным для центральных движений.*

В самом деле, мы уже показали, что уравнение (56) представляет собой следствие определяющего центральное движение соотношения (54). Обратно, если имеет место соотношение (56), то, диференцируя его и учитывая тождество (55), получим соотношение (54).

Рассмотрим еще, в частности, длину момента $[\overline{OP}v]$. Эту длину можно выразить произведением v (величины или напряжения скорости) на расстояние точки O от прямой действия вектора v. Вследствие этого постоянство произведения $[\overline{OP}v]$ приводит к следующему предложению.

Во всяком центральном движении произведение напряжения скорости на расстояние касательной к траектории от центра остается постоянным во все время движения.

49. Очень важно отметить, что *всякое центральное движение представляет собой движение плоское.*

Это вытекает непосредственно из соотношения (56). В самом деле, рассмотрим сначала общий случай, когда постоянный вектор c отличен от нуля. Из соотношения (56) в этом случае следует, что вектор $\overline{OP}$ остается перпендикулярным к c. Движущаяся точка P остается в плоскости, проходящей через центр движения O перпендикулярно к c.

50. Остается, таким образом, исследовать частный случай, когда вектор c обращается в нуль. Мы можем при этом, конечно, исключить тривиальное предположение, что и вектор $\overline{OP}$ тождественно обращается в нуль; точка оставалась бы тогда неподвижной в точке O. Мы обратимся поэтому к интервалу, в течение которого $\overline{OP}$ остается отличным от нуля. Если, положим, $\overline{OP} = \rho u$, где u есть версор вектора $\overline{OP}$, а ρ выражает расстояние OP, то соотношение (56) в рассматриваемом случае, т. е. при $c = 0$, устанавливает, что скорость v (если не обращается в нуль) параллельна вектору $\overline{OP}$. Мы можем поэтому положить:

$$v = \sigma\overline{OP} = \sigma\rho u,$$

где σ есть скаляр, который, вообще, как и ρ, представляет собою функцию времени. Так как вектор v представляет собою производную $\overline{OP}$, то последнее равенство можно написать в виде:

$$\dot{\rho} u + \rho \dot{u} = \rho \sigma u.$$

С другой стороны, вектор $\dot{u}$ должен быть либо перпендикулярен к u (рубр. 61), либо равен нулю. Первое предположение, однако, исключается; в самом деле, умножая обе части последнего равенства скалярно на $\dot{u}$, мы получили бы $\rho \dot{u}^2 = 0$ и, следовательно, $\rho = 0$. Поэтому нужно принять, что $\dot{u} = 0$, т. е. что u есть постоянный версор; равенство $\overline{OP} = \rho u$ обнаруживает, что движение является прямолинейным (частный случай плоского движения)[1].

51. Так как центральные движения принадлежат к плоским, то целесообразно их формально характеризовать, оставаясь в плоскости движения и принимая ее за плоскость Oxy. Тогда z, $\dot{z}$, $\ddot{z}$ обращается в нуль, а вектор $[\overline{OP}a]$ имеет две компоненты (по осям x и y), равные нулю, каково бы ни было движение в плоскости x, y; третья же компонента (по оси z) имеет значение $x\ddot{y} - y\ddot{x}$. Отсюда следует, что для нашего центрального движения, в силу соотношения (54), имеет место диференциальное уравнение:

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0; \tag{54'}$$

оно характеризует центральное движение. Но, так как мы имеем тождественно

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

то это условие (54′) можно заменить эквивалентным ему:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \text{const.}, \tag{56'}$$

которое выражает (рубр. 20) постоянство секториальной скорости и непосредственно проистекает (проекция на ось z) из соотношения (56).

52. **Радиальное и трансверсальное (поперечное) ускорения в плоском движении.** Чтобы легче исследовать одну важную категорию центральных движений, выведем, прежде всего, для любого плоского движения, отнесенного к полярным координатам

[1]) Может быть проще будет следующее доказательство этого случая. Так как ускорение a направлено по прямой $\overline{OP}$, то при $[\overline{OP}\,v] = 0$ и $[av] = 0$. С другой стороны, по общей формуле рубр. 26:

$$a = \ddot{s}t + v^2 \sigma n,$$

где σ — кривизна траектории в соответствующей точке. Умножая обе части этого равенства векторно на v и принимая во внимание, что $[tv]$ всегда равно нулю, получим $v^2 \sigma [nv] = 0$. Но произведение двух взаимно перпендикулярных векторов v и n при $v \neq 0$ не может обратиться в нуль; поэтому на всем протяжении траектории $\sigma = 0$, т. е. движение прямолинейное. (*Ред.*)

(рубр. **19**), выражения радиального и трансверсального ускорений, т. е. компоненты ускорения a_ρ и a_θ по ориентированному направлению $\overline{OP}$ и по перпендикулярному к $\overline{OP}$ направлению, ориентированному относительно OP так, как ось y ориентирована относительно оси x.

Так как направляющие косинусы этих направлений соответственно суть

$$\cos\theta = \frac{x}{\rho}, \quad \sin\theta = \frac{y}{\rho}, \quad -\sin\theta = -\frac{y}{\rho}, \quad \cos\theta = \frac{x}{\rho},$$

то мы будем иметь, прежде всего:

$$a_\rho = \frac{x\ddot{x} + y\ddot{y}}{\rho}, \quad a_\theta = \frac{x\ddot{y} - y\ddot{x}}{\rho}.$$

Чтобы выразить a_ρ в функции от $\rho\theta$ и их производных, будем исходить из основного соотношения:

$$x^2 + y^2 = \rho^2.$$

Продиференцировав его два раза по времени, получим:

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \rho\ddot{\rho} + \dot{\rho}^2;$$

а так как [рубр. **19**, формула (19)]

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2,$$

то

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = \rho\ddot{\rho} - \rho^2\dot{\theta}^2;$$

отсюда мы и получаем для радиального ускорения выражение:

$$a_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\theta}^2. \tag{57'}$$

Что касается a_θ, то припомним (рубр. **20**), что

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \rho^2\dot{\theta}.$$

Замечая поэтому, что

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}), \tag{58}$$

находим:

$$a_\theta = \frac{1}{\rho}\frac{d}{dt}(\rho^2\dot{\theta}), \tag{57'}$$

или в раскрытом виде:

$$a_\theta = 2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta}. \tag{58'}$$

Отметим, что в случае кругового движения вокруг точки O ($\rho = \text{const.}$) соотношения (57) и (58) принимают вид:

$$a_\rho = -\rho\dot{\theta}^2, \quad a_\theta = \rho\ddot{\theta}. \tag{58''}$$

Это тангенциальное и нормальное ускорения рубр. **26** для кругового движения с тою разницей, что первое рассчитано в центробежном направлении (от O к P), а не в центростремительном (от P к O); это и выражается знаком минус в первом из равенств (58″), так как ускорение направлено к центру.

53. Формула Бине. Применим теперь формулы (57) и (58) к центральным движениям. По самому своему определению центральное движение характеризуется тем, что поворотное ускорение a_θ относительно некоторой определенной точки O (центра движения) обращается в нуль; поэтому диференциальная характеристика этих движений в полярных координатах выражается так:

$$2\dot{\rho}\dot{\theta} + \rho\ddot{\theta} = 0,$$

а это, как оно и естественно, устанавливает только, что $\rho^2\dot{\theta}$ (двойное значение секториальной скорости) имеет постоянное значение.

Полагая соответственно этому

$$\rho^2\dot{\theta} = c, \tag{59}$$

можно дать радиальному ускорению a_ρ (которое в рассматриваемом случае центрального движения дает по абсолютному значению все скалярное ускорение точки) чисто геометрическое выражение, т. е. такое, которое вовсе не содержит производных от ρ и θ по времени; для этого необходимо воспользоваться только уравнением траектории в полярных координатах $\rho = \rho(\theta)$. Вследствие этого уравнения можно считать, что радиус-вектор ρ зависит от t через посредство θ, т. е. ρ становится функцией от t благодаря тому, что θ есть функция от t. Таким образом мы получаем

$$\dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\theta}\dot{\theta};$$

исключая же отсюда $\dot{\theta}$ при посредстве соотношения (59), находим:

$$\dot{\rho} = \frac{c}{\rho^2}\frac{d\rho}{d\theta} = -c\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\theta}.$$

Рассматривая теперь опять вторую часть этого равенства как функцию от t, составленную через посредство θ, будем его вновь диференцировать по t и на основании соотношения (59) положим затем $\dot{\theta} = \frac{c}{\rho^2}$; мы получим:

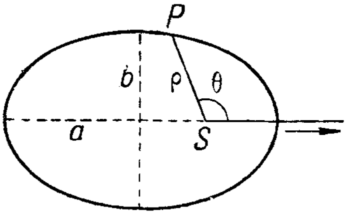
$$\ddot{\rho} = -\frac{c^2}{\rho^2}\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}.$$

Подставляя это выражение для ρ в формулу (57) и снова исключая θ при помощи соотношения (59), мы получим требуемое выражение радиального ускорения:

$$a_\rho = -\frac{c^2}{\rho^2}\left\{\frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}\right\}; \tag{60}$$

оно носит название формулы Бине [1]), хотя оно было раньше известно еще Ньютону [2]).

54. Кеплерово движение. Одним из наиболее интересных центральных движений является вращение планет вокруг солнца. Такого рода движение называют *кеплеровым*, так как законы его были впервые формулированы Кеплером [3]).



Фиг. 43.

Как известно, законы *Кеплера* заключаются в следующем:

1. Орбитами планет служат эллипсы, в одном из фокусов которых находится солнце.

2. Площади, описанные радиусом-вектором, идущим от солнца к планете, пропорциональны временам, в которые они были пройдены.

3. Квадраты времен, в течение которых различные планеты пробегают свои орбиты (времен их обращения), пропорциональны кубам больших осей этих орбит.

---

[1]) Яков Бине (Jacques Binet) родился в Ренне в 1786 г., умер в Париже в 1856 г., был преподавателем астрономии в Collège de France.

[2]) Исаак Ньютон (Isaac Newton) родился в деревне Линкольнского графства в 1642 г. (год смерти Галилея), умер в предместьи Лондона в 1727 г. Здесь достаточно упомянуть о его сочинении „Philosophiae naturalis principia mathematica“ („Математические начала философии естествознания“), выпущенном в первый раз в Лондоне в 1687 г. В этом сочинении изложены в форме, быстро сделавшейся классической, основы теоретической механики и математической физики, а также некоторые великие их следствия. Чтобы получить возможность развернуть эти дисциплины, Ньютон создал необходимые для этого математические средства — по существу исчисление бесконечно-малых. Он разделяет с Кавальери и Лейбницем заслугу открытия диференциального и интегрального исчислений; удачная символика диференциалов сохранившаяся по настоящее время, принадлежит, впрочем, Лейбницу. Ньютона считают величайшим гением в области точного естествознания, из всех когда-либо существовавших. Эпиграф на его могиле в Вестминстерском аббатстве в Лондоне заканчивается словами: „Sibi gratulentur Mortales tale tantumque extitisse Humani Generis Decus“ („Пусть поздравляют себя смертные с тем, что были в состоянии выставить столь великое украшение рода человеческого“).

[3]) Иоанн Кеплер (J. Kepler) родился в деревне, в Вюртемберге, в 1571 г., умер в Ратисбоне в 1630 г. Он был сначала помощником, а потом преемником датчанина Тихо-Браге (Tycho Brahe) в должности математика и астронома императорского двора в Праге. Из знаменитых трех его законов первые два были опубликованы в сочинении „Astronomia nova, sive etc.“ (Heidelbergue 1609), а третий — в сочинении „Harmonices mundi“, Libri V (Linz 1619).

В силу второго закона движение каждой планеты является центральным (рубр. 48) и имеет солнце своим центром.

Вычислим значение компоненты a_ρ ускорения по радиусу-вектору.

Поместим полюс в одном из двух фокусов эллипса и направим полярную ось по большой оси в сторону более близкой вершины; обозначим через a большую полуось, через b малую полуось, через e эксцентриситет орбиты, наконец, через p параметр ее. Тогда, как известно из аналитической геометрии:

$$e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}},\quad p=\frac{b^2}{a},\quad \rho=\frac{p}{1+e\cos\theta}.$$

Отсюда последовательно находим:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{1}{p}+\frac{e}{p}\cos\theta,$$

$$\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}=-\frac{e}{p}\cos\theta,\qquad \frac{1}{\rho}+\frac{d^2\frac{1}{\rho}}{d\theta^2}=\frac{1}{p}.$$

Соотношение (60) при этих условиях принимает вид:

$$a_\rho=-\frac{c^2}{p}\frac{1}{\rho^2}.$$

Отсюда мы видим, что ускорение всегда направлено к солнцу и изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния от него.

Сверх того, из третьего закона Кеплера нетрудно вывести, что коэфициент пропорциональности:

$$\frac{c^2}{p}=\frac{ac^2}{b^2},$$

имеет одно и то же значение для всех планет. В самом деле, если обозначим через T продолжительность полного обращения планет и вспомним, что c есть двойная секториальная скорость движения, то нам станет ясно, что площадь эллиптической орбиты планеты выражается также произведением $\frac{c}{2}T$. Поэтому

$$c=\frac{2\pi ab}{T};$$

возвышая обе части этого равенства в квадрат и деля их на $p=\frac{b^2}{a}$, получим:

$$\frac{c^2}{p}=\frac{4\pi^2a^3}{T^2};$$

но по третьему закону Кеплера отношение $\frac{a^3}{T^2}$ имеет одно и то же значение для всех планет; то же самое имеет, следовательно, место и для отношения $\frac{c^2}{p}$.

9. Равномерное винтовое движение.

55. В качестве последнего примера рассмотрим движение, составленное (рубр. 5) из равномерного кругового движения на плоскости π и прямолинейного равномерного движения по прямой, перпендикулярной к π. Так как слагающее прямолинейное движение есть движение проекции движущейся точки P на некоторую прямую, то, очевидно, все равно, по какой из параллельных прямых оно происходит. Поэтому без ограничения общности мы можем предположить, что траекторией прямолинейного движения служит перпендикуляр к плоскости π из центра O окружности, по которой происходит круговое движение. Отсчет времени будем производить от момента, в который точка, равномерно двигающаяся по этому перпендикуляру, находится в точке O. Эту точку O мы примем за начало декартовых координат; за ось z примем траекторию слагающего прямолинейного движения, ориентировав эту прямую так, чтобы круговое движение представлялось правосторонним; за положительную ось x примем луч, идущий из центра O к той точке окружности, в которой находится движущаяся по ней точка P_1 в момент $t=0$ (когда точка P_z, двигающаяся по оси z, находится в O). Ориентированная ось y при этих условиях уже однозначно определена установленным соглашением, что триэдр $Oxyz$ должен быть правосторонним. Наконец, через r обозначим радиус круговой траектории точки P_1, через ω — ее угловую скорость (по условию, *постоянную*) и через V — абсолютное значение скорости точки P_z (также *постоянное*).

В момент $t=0$ точка P_1 в силу сделанного нами выбора координат находится в точке, имеющей на плоскости x, y координаты r, 0. Это соответствует тому, что в уравнениях (39) равномерного кругового движения $\theta_0=0$; а потому эти уравнения примут в настоящем случае вид:

$$x=r\cos\omega t,\quad y=r\sin\omega t;$$

уравнение же движения точки P_z по оси z, поскольку она в момент $t=0$ должна находиться в O, будет:

$$z=\pm Vt,$$

причем здесь нужно взять знак $+$ или $-$ в зависимости от того, является ли движение P_z при установленной стороне обращения оси z прогрессивным или регрессивным.

Соединяя теперь движения точек P_1 и P_z в одно движение точки P, мы получим для последнего уравнения:

$$x = r\cos\omega t, \quad y = r\sin\omega t, \quad z = \pm Vt. \tag{61}$$

Возвышая последние два уравнения в квадрат и складывая их, получим:

$$x^2 + y^2 = r^2; \tag{62}$$

этим подтверждается обстоятельство, и без того ясное, что движение точки P происходит по цилиндрической поверхности вращения, меридианом которой служит окружность радиуса r, а осью — ось z.

Скорость v точки P имеет компоненты:

$$\dot{x} = -r\omega\sin\omega t, \quad \dot{y} = r\omega\cos\omega t, \quad \dot{z} = \pm V;$$

отсюда напряжение скорости:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + V^2}$$

оказывается *постоянным*, так что результирующее движение является *равномерным*, как и его составляющие.

Сверх того, из трех направляющих косинусов скорости v третий:

$$\frac{\dot{z}}{v} = \pm\frac{V}{\sqrt{r^2\omega^2 + V^2}},$$

имеет постоянное значение; это означает, что скорость, а следовательно, и касательная к траектории, наклонена под постоянным углом к оси z, т. е. составляет постоянный угол с образующими круглого цилиндра, по поверхности которого происходит движение точки P. Мы отсюда заключаем, что траектория точки P представляет собою винтовую линию на круглом цилиндре (62). Вместе с тем, движение (61) характеризуется тем, что это — равномерное винтовое движение; ось z служит осью винта, радиус основания равен r, а угол наклонения к оси есть

$$\arccos\frac{\pm V}{\sqrt{r^2\omega^2 + V^2}}.$$

Ускорение, которое ввиду равномерности движения должно сводиться к своей центробежной слагающей, имеет компоненты:

$$\ddot{x} = -r\omega^2\cos\omega t = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -r\omega^2\sin\omega t = -\omega^2 y, \quad \ddot{z} = 0.$$

Оно имеет постоянное напряжение $\omega^2 r$ и направлено по перпендикуляру из точки P к оси z; оно совпадает, таким образом, с ускорением, которое имела бы точка, совершающая равномерное движение с угловой скоростью ω по окружности ортогонального сечения цилиндра.

Отметим еще, наконец, что за промежуток времени $\frac{2\pi}{\omega}$ (период слагающего кругового движения) точка P_1 обходит всю окружность, а следовательно, точка P описывает целый завиток винта (т. е. дугу винтовой линии, содержащуюся между двумя последовательными ее пересечениями с одной и той же образующей цилиндра); соответственно этому третья координата $z = \pm Vt$ изменяется за тот же промежуток времени на

$$\pm \frac{2V\pi}{\omega};$$

поэтому число $\frac{2V\pi}{\omega}$ называется *ходом винта* (расстояние между двумя последовательными пересечениями винтовой линии с одной и той же образующей). Ход винта зависит только от отношения $\frac{V}{\omega}$ скоростей обеих составляющих движений, — точнее, он прямо пропорционален скорости прямолинейного движения и обратно пропорционален скорости кругового движения.

Равномерное винтовое движение называется *правосторонним* или *левосторонним* в зависимости от того, как будет представляться слагающее круговое движение наблюдателю, *ориентированному в сторону прямолинейного движения.* Так как в уравнениях (61) ось предполагается ориентированной таким образом, что круговое движение является по отношению к ней правосторонним, то *уравнения* (60) *выражают правостороннее или левостороннее винтовое движение в зависимости от того, взята ли третья координата со знаком* + *или* —

УПРАЖНЕНИЯ.

1. Поезд в движении имеет скорость в 72 *км* в час. При помощи тормозов его можно остановить в 20 мин. Допуская, что движение поезда за этот промежуток является равномерно замедленным, вычислить, на каком расстоянии от станции нужно пустить в действие тормоза.

2. Закон, по которому точка движется по траектории, выражается путевым уравнением $s = f(t)$ (§ 4). *Годографом* или *диаграммой* движения называется кривая, выражаемая тем же уравнением, если t принимается за абсциссу, а s за ординату точки. В соответствии с этим:

a) вычертить диаграмму равномерного движения с остановками или без них (приложение к железнодорожным графикам);

b) вычертить диаграмму гармонического движения

3. Точка A движется по прямой равномерно. Определить траекторию (*кривую преследования*) точки P, движущейся таким образом, что ее скорость, сохраняя постоянное напряжение v, всегда направлена к точке A. Вычислить время, необходимое точке P, чтобы настигнуть точку A (в предположении, что v больше скорости u точки A).

4. Принимается, что вода в реке вблизи прямолинейного берега течет со скоростью, пропорциональной расстоянию от берега. Человек, плывущий поперек реки с постоянной скоростью (относительно воды), описывает дугу параболы. Показать, что время, в которое он достигнет берега, не зависит от скорости течения реки (т. е., собственно, от коэфициента пропорциональности между скоростью и расстоянием).

5. Лодка отходит от точки A на берегу реки, вода которой течет с постоянной скоростью v, и направляется в каждый момент к противоположной точке B также с постоянной скоростью u (относительно воды) [1]. Ширина реки равна l. Определить траекторию, пройденную лодкой, время, в течение которого она переплыла реку, наибольшее удаление, которое она имела в пути от прямой AB, и ее скорость в момент наибольшего удаления.

6. В любой момент движения точки угол между двумя векторами — скоростью и ускорением — будет острым или тупым, в зависимости от того, является ли движение в этот момент ускоренным или замедленным.

7. Вывести выражения радиальной и трансверсальной скоростей плоского движения, исходя из уравнения движения в форме

$$\overline{OP} = \rho e^{i\theta},$$

где ρ и θ суть две определенные функции от t [2].

Таким же приемом получить компоненты радиального и поворотного ускорений.

8. Показать, что плоское движение точки, в котором как тангенциальная, так и нормальная компоненты ускорения имеют постоянные значения, происходит по логарифмической спирали или по одной из кривых, представляющих ее вырождения

(По условию $\frac{dv}{dt} = a$, $\frac{v^2}{r} = b$, где a и b — постоянные; так как $\frac{dv^2}{ds} = \frac{1}{v}\frac{dv^2}{dt}$, то первое из этих соотношений дает $\frac{dv^2}{ds} = 2a$; диференцируя теперь по s второе соотношение $v^2 = br$, получаем $\frac{dr}{ds} = \frac{2a}{b}$; это именно соотношение и характеризует логарифмические спирали и их вырождения.)

9. Как известно, если дана кривая на плоскости, то подошвенной точкой любой ее точки P относительно полюса O называется основание Q перпендикуляра, опущенного из точки O на касательную к кривой, проведенную в точке P.

Обозначая через ρ и θ — полярные координаты точки P относительно полюса O, через p — длину радиуса-вектора подарной точки Q, соответствующей P, легко доказать следующие два диференциальные соотношения:

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{p}{\rho^2}, \quad \frac{dp}{d\rho} = c\rho,$$

где ds и ρ означают элемент длины и кривизну данной кривой в точке P. Если через φ обозначим аномалию касательной (надлежащим образом ориентированной), то аномалия подарной точки Q имеет значение $\varphi + \frac{\pi}{2}$, и первое из вышеприведенных двух соотношений можно написать в виде:

$$\frac{pd\left(\overline{\varphi} + \frac{\pi}{2}\right)}{\rho\, d\theta} = c\rho.$$

Основываясь на этом результате и на втором из двух вышеприведенных соотношений, можно показать [опираясь на соотношение (19) рубр. **19**], что при любом плоском движении напряжение скорости подарной точки равно $\rho c v$, где v — скорость точки P.

---

[1] То-есть лодочник ведет лодку так, что в каждый момент движения ее собственная скорость (по отношению к воде) направлена к точке B и имеет постоянное напряжение u.

[2] Нужно заметить, что здесь идет речь о векторе $\overline{OP}$, а не о его длине OP. (*Ред.*).

10. Вычислить глубину оврага, опуская в него камень и учитывая время, протекшее между моментами, когда камень был опущен и когда был услышан шум от удара камня о дно оврага. Принимается при этом, что звук распространяется со скоростью 340 *м/сек*.

11. Камень брошен вертикально вверх. При подъеме он проходит некоторое расстояние h (по отношению к начальному своему положению) в t_1 секунд и затем, достигнув наибольшей высоты подъема, опускается и возвращается обратно через следующие t_2 секунд. Показать, что $2h = gt_1t_2$ и что начальная скорость камня была равна $\frac{1}{2}g(t_1+t_2)$.

12. Даны две точки A и B; определить, в каком направлении нужно бросить из A тяжелое тело с заданной (по напряжению) скоростью v_0, чтобы оно прошло через точку B.

(Нужно воспользоваться первой формулой рубр. **32**, принимая точку A за начало координат; далее, выразить, что парабола, выходящая из A под неизвестным углом α, пройдет через точку B (x, y). Это приводит к квадратному уравнению относительно $\operatorname{tg}\alpha$. Задача может иметь: два решения, одно или ни одного. Эти три случая характеризуются тем, что *точка B не может быть достигнута, если она лежит вне параболы*

$$y = \frac{1}{2}\,\frac{v_0^2}{g} + \frac{1}{2}\,g\frac{x^2}{v_0^2},$$

которая поэтому называется *параболой безопасности*.)

13. Несколько тяжелых точек брошены из одной и той же точки O в одной и той же вертикальной плоскости в различных направлениях, но с той же начальной скоростью v_0. Показать, что геометрическое место фокусов траекторий есть окружность $\left(\text{с центром в точке } O \text{ и радиусом } \frac{v_0^2}{2g}\right)$, что геометрическое место вершин этих парабол есть эллипс, что все они огибают параболу безопасности (см. предыдущее упражнение).

14. Несколько тяжелых тел (точек), брошенных в один и тот же момент из одной и той же точки и с одной и той же скоростью (но в различных направлениях), в каждый момент движения находятся на одной сфере (центр и радиус которой меняются от момента к моменту).

15. Два камня брошены с вершины башни с одной и той же скоростью, но в различных направлениях, именно под углами α_1 и α_2 к горизонту. Как оказалось, они упали в одно и то же место. Определить высоту башни.

16. Две тяжелые точки двигаются в одной и той же вертикальной плоскости. Если в какой-либо момент их скорости расположены симметрично относительно какой-либо вертикали, то они останутся симметричными и в любой другой момент движения.

17. Орудие устанавливается перед вертикальной стеной так, чтобы снаряды могли проноситься над стеной; высота стены над дулом пушки равна h, расстояние пушки от стены равно d. Выстрелы производятся в плоскости, перпендикулярной к стене, под различными углами, но с одной и той же начальной скоростью v_0. Какому ограничению должны быть подвергнуты данные задачи для того, чтобы снаряды действительно могли попадать за стену, не проламывая ее. Если это ограничение удовлетворено, то каково расстояние, над которым оружие *командует*, т. е. какова длина отрезка MN, в пределы которого падают снаряды, пролетающие над стеной?

18. Под средним значением функции $f(\lambda)$ в произвольном интервале (λ_1, λ_2) разумеют отношение:

$$\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\int\limits_{\lambda_1}^{\lambda_2} f(\lambda)\,d\lambda.$$

Опираясь на это определение, показать, что при каждом равномерно переменном прямолинейном движении, начинающемся с состояния покоя, имеют место следующие соотношения:

a) Если рассматривать скорость как функцию времени, то среднее ее значение от начального до любого конечного момента равно половине скорости в конечный момент.

b) Если рассматривать скорость как функцию от расстояния точки от начального положения, то ее среднее значение (между начальным и произвольным другим положениями) составляет две трети конечного значения.

19. Показать, что какое угодно число гармонических движений:

$$x = r_i \cos (\omega t + \theta_i) \ (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

происходящих на одной и той же прямой с одним и тем же центром и одним и тем же периодом, соединяются в одно (*результирующее*) гармоническое движение:

$$x = \sum_{i=1}^{i=n} r \cdot \cos (\omega t + \theta_i),$$

имеющее тот же центр и тот же период.

20. Пусть будет дано произвольное гармоническое движение $x = r \cos (\omega t + \theta)$ На произвольной плоскости (плоскости чертежа) наносим систему полярных координат и радиус-вектор $\overline{OP}$, имеющий длину r и аномалию θ. Такой вектор представляет совместно обе постоянные r и θ (амплитуду и начальную фазу) и потому называется *изображением* рассматриваемого *гармонического движения*.

Показать, что результирующее гармоническое движение, о котором идет речь в упражнении **19**, изображается вектором, представляющим собою сумму тех векторов, которые изображают слагающие гармонические движения.

21. Показать, что движение, слагающееся из двух гармонических движений с общим центром и общим периодом, имеет своей траекторией эллипс (вырождающийся в частных случаях в окружность и в прямую).

22. Если проекции движущейся точки P на три оси координат совершают гармонические колебания, имеющие общий центр в начале координат, то это движение центральное, а траекторией его служит эллипс.

Указать, в каких случаях это движение оказывается круговым или прямолинейным.

23. В электротехнике обыкновенно называют *вращающимся вектором* вектор, выходящий из постоянной точки, имеющий постоянную длину и вращающийся равномерно в плоскости; под *альтернирующим* вектором разумеют проекцию вращающегося вектора на постоянную прямую, проходящую через центр вращения (начало вращающегося вектора), и расположенного в плоскости вращения.

Совершенно ясна тесная зависимость, связывающая вращающийся вектор и соответствующий альтернирующий вектор с равномерным движением точки по окружности и соответствующим гармоническим колебанием. Вспоминая определения рубр. **34**, очевидно, очень легко сообразить, что́ разумеют под *величиной, стороной вращения, частотой и фазой* вращающегося вектора и *под амплитудой, прямой действия, частотой и фазой* альтернирующего вектора.

Исходя из этих определений, доказать следующие свойства:

a) В плоскости даны два вращающиеся вектора одинаковой частоты. Если оба вектора вращаются в одну и ту же сторону, то их сумма (результирующий вектор) представляет собою также вращающийся вектор. Если же они вращаются в противоположные стороны, то результирующий вектор может быть разложен на альтернирующий и вращающийся векторы (последний обращается в нуль, если вращающиеся компоненты имеют одинаковую длину).

b) Результирующий вектор какого угодно числа альтернирующих векторов, имеющих одинаковую частоту и одну и ту же прямую действия, сам представляет собою альтернирующий вектор (ср. упражнение **19**).

c) Два альтернирующие вектора дают вращающийся результирующий вектор, если они имеют равные амплитуды и частоты и если разность их фаз равна дополнению угла, содержащегося между их направлениями (ср. упражнение **21**, случай окружности; это наблюдение привело к открытию *вращающегося магнитного поля* Галилео Феррариса).

24. В затухающем колебательном движении продолжительность одного простого полуоборота (полупериода $\frac{\pi}{\omega}$ соответствующего гармонического колебания) составляет 1 сек. Было обнаружено, что определенные положения колеблющейся точки в одном таком полуобороте отстояли соответственно на 20 и 19 *см* от центра по одну и другую сторону от него. Через сколько времени (считая от момента, когда движущаяся точка находилась на расстоянии 20 *см* от центра) можно будет считать движение затухшим, если пренебречь полуоборотами, амплитуды которых ниже 1 *мм*.

25. В замедленном спиральном движении, рассмотренном в рубр. **37**, ускорение наклонено к нормали под постоянным углом, тангенс которого равен m.

26. Если точка движется по закону, выражаемому уравнением $P = P(t)$, то соответствующим годографическим движением называется движение точки V, определяемое уравнением:

$$\overline{OV} = \dot{P}(t),$$

где O—произвольная постоянная точка. Определенная таким образом точка V, очевидно, представляет собою конечную точку вектора, представляющего скорость точки P в момент t и приложенного в точке O.

Показать, что для равномерного движения годографическое движение имеет траекторией сферическую кривую; для кеплеровых движений эта кривая представляет собою окружность (центр которой лежит на ординате фокуса).

Наметим ход аналитического доказательства последнего предложения. Относя траекторию к ее осям и вводя эксцентрическую аномалию u, имеем:

$$x = a\cos u, \quad y = b\sin u;$$

отсюда фокальный радиус

$$\rho = a(1 - e\cos u),$$

где e — эксцентриситет траектории.

Если параллельным перенесением осей поместим начало координат в фокус (центр движения), то будем иметь:

$$x_1 = x - c, \quad y_1 = y.$$

С другой стороны, принимая во внимание постоянство секториальной скорости (относительно фокуса), найдем:

$$\dot{u} = \frac{n}{1 - e\cos u},$$

где $n = \frac{C}{ab}$, а C означает двойную постоянную площадей.

Теперь обозначим через ξ, η координаты произвольной точки годографа; тогда

$$\xi = \dot{x} = -an\frac{\sin u}{1 - e\cos u}, \quad \eta = \dot{y} = bn\frac{\cos u}{1 - e\cos u},$$

или после простых преобразований:

$$\xi = -\frac{a^2 n}{b}\frac{y_1}{\rho}, \quad \eta - \frac{a^2 ne}{b} = \frac{a^2 n}{b}\frac{x_1}{\rho};$$

отсюда непосредственно вытекает требуемое предложение.

То же предложение можно доказать синтетически, если принять во внимание, что *подарой* (геометрическое место подарных точек) эллипса относительно одного из его фокусов служит окружность и что окружность при инвертировании обратными радиусами-векторами переходит в окружность же. Теперь достаточно применить эти две теоремы к выражению тех кинематических обстоятельств движения, что секториальная скорость имеет постоянное значение и выражается моментом скорости относительно центра; это же последнее свойство выражается равенством:

$$pv = C,$$

где p есть расстояние фокуса от касательной к эллипсу.

27. При каждом центральном движении имеет место соотношение:

$$a_\rho = \frac{C^2 \rho}{r p^3},$$

где C, ρ и p сохраняют те же значения, что и в предыдущей задаче, а r есть радиус кривизны траектории.

28. Если точка движется по эллипсу центральным движением относительно центра эллипса, то ускорение пропорционально радиусу-вектору; если она движется по логарифмической или гиперболической спирали, совершая центральное движение относительно полюса спирали, то ускорение обратно пропорционально кубу радиуса-вектора.

29. В кеплеровом движении слагающие скорости по перпендикуляру к радиусу-вектору и по малой оси траектории имеют каждая постоянное значение (см. указание к упражнению **26**).

30. Точка описывает окружность $x^2+y^2=1$ с ускорением, которое численно все время равно 1; в тот момент, когда движущаяся точка находится на оси абсцисс в точке (1,0), ускорение направлено к центру окружности.

Показать, что при этих условиях движение либо происходит равномерно, либо имеет ускорение, компоненты которого равны:

$$\ddot{x} = -\cos 3\theta, \quad \ddot{y} = -\sin 3\theta,$$

где θ — аномалия движущейся точки.

[В самом деле, из соотношений (58″) рубр. **52** следует, что при заданных условиях $a_\rho = -\dot{\theta}^2$, $a_\theta = \ddot{\theta}$, а потому

$$\dot{\theta}^4 + \ddot{\theta}^2 \leqslant 1.$$

Мы получаем частное решение этого дифференциального уравнения, полагая $\ddot{\theta} = 0$, $\dot{\theta} = \pm 1$; ему соответствует равномерное движение по окружности; предполагая $\ddot{\theta} \neq 0$, мы введем вспомогательный угол ψ и заменим квадратное уравнение, связывающее $\dot{\theta}$ и $\ddot{\theta}$ параметрическими уравнениями:

$$\dot{\theta} = \cos\psi, \quad \ddot{\theta} = \sin\psi.$$

Диференцируя первое уравнение и сопоставляя результат со вторым, получим:

$$2\dot{\theta}\ddot{\theta} = -\ddot{\theta}\dot{\psi}.$$

Исключая случай, когда $\ddot{\theta} = 0$, получим $2\dot{\theta} = -\dot{\psi}$; принимая же во внимание начальное условие, заданное для положения $\theta = 0$, находим $\psi = -2\theta$. Отсюда следует, что

$$a_\rho = -\cos 2\theta, \quad a_\theta = -\sin 2\theta,$$

а так как

$$\ddot{x} = a_\rho \cos\theta - a_\theta \sin\theta, \quad \ddot{y} = a_\rho \sin\theta + a_\theta \cos\theta,$$

то отсюда вытекает непосредственно соотношение, указанное в задании.]

31. Показать (пользуясь нормальной слагающей в равномерном винтовом движении), что радиус кривизны кругового винта имеет постоянное значение $R + \frac{h^2}{R}$, где R — радиус цилиндра, которому винт принадлежит, а h — его ход.

32. На цилиндрической поверхности с каким угодно сечением кривые, пересекающие все образующие под постоянным углом, называются также винтовыми линиями. Из этого определения непосредственно вытекает, что скорость движущейся точки сохраняет постоянное отношение к своей проекции на неподвижную плоскость в том и только в том случае, если траекторией служит винтовая линия.