Теорема об изменении кинетической энергии в задачах механики

А.ОВЧИННИКОВ, В.ПЛИС

Целый ряд задач механики можно решить, опираясь на важное следствие второго закона Ньютона — теорему об изменении кинетической энергии. Эта теорема утверждает, что изменение (приращение) кинетической энергии материальной точки равно работе всех сил, приложенных к этой точке:

$$\frac{mv^2}{2}-\frac{mv_0^2}{2}=A.$$

Здесь m — масса материальной точки, v и v_0 — величины ее конечной и начальной скоростей, A — работа всех сил.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *Чтобы затащить на горку санки массой $m = 5$ кг, прикладывая постоянную силу вдоль наклонной плоской поверхности горки, необходимо совершить работу не менее $A = 480$ Дж. С какой скоростью достигнет основания горки девочка на этих санках, если она съедет с горки с нулевой начальной скоростью по кратчайшему пути? Угол наклона плоскости горки к горизонту $\alpha = \operatorname{arctg} 0{,}2$. Коэффициент трения скольжения между санками и горкой $\mu = 0{,}1$.*

На санки, движущиеся по горке вверх, действуют четыре силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормальной реакции $\vec{N}_1$, сила трения $\vec{F}_{\text{тр1}}$ и сила тяги $\vec{F}$. В соответствии со вторым законом Ньютона, записанным в проекциях на перпендикуляр к наклонной плоскости горки, находим $N_1 = mg\cos\alpha$. Тогда для величины силы трения скольжения имеем

$$F_{\text{тр1}} = \mu N_1 = \mu mg\cos\alpha.$$

По теореме об изменении кинетической энергии для санок, очень медленно движущихся вверх, получим

$$0-0 = A + A_{\text{тяж1}} + A_{\text{тр1}}.$$

В левой части равенства стоит разность кинетических энергий санок в конце и в начале движения, а в правой части записаны следующие величины: A — работа силы тяги, $A_{\text{тяж1}} = mgl\cos(\pi/2+\alpha) = -mgl\sin\alpha = -mgH$ — работа силы тяжести (здесь l — длина горки, H — ее высота), $A_{\text{тр1}} = (\mu mg\cos\alpha)l\cos\pi = -\mu mgs$ — работа силы трения (здесь s — длина основания горки). Работа силы реакции, перпендикулярной перемещению, равна нулю. Таким образом, описание подъема санок приводит к равенству

$$\frac{A}{m} = g(H+\mu s).$$

На спускающиеся с горки санки с девочкой действуют три силы: сила тяжести $M\vec{g}$ (M — сумма масс девочки и санок), сила нормальной реакции величиной $Mg\cos\alpha$ и сила трения, равная $\mu Mg\cos\alpha$. По теореме об изменении кинетической энергии теперь имеем

$$\frac{Mv^2}{2}-0 = A_{\text{тяж2}} + A_{\text{тр2}},$$

где в левой части равенства стоит разность кинетических энергий девочки с санками у основания горки и на старте (в верхней части горки), в правой части — сумма работ всех сил: $A_{\text{тяж2}} = Mgl\cos(\pi/2-\alpha) = Mgl\sin\alpha = MgH$, $A_{\text{тр2}} = (\mu Mg\cos\alpha)l\cos\pi = -\mu Mgl\cos\alpha = -\mu Mgs$, а работа силы реакции, как и на этапе подъема равна нулю. После простых преобразований находим

$$\frac{v^2}{2} = g(H-\mu s).$$

Наконец, деление этой формулы на полученную ранее аналогичную формулу приводит окончательно к ответу на вопрос задачи:

$$v = \sqrt{\frac{2A}{m}\frac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{\operatorname{tg}\alpha+\mu}} = 8 \text{ м/с}.$$

Задача 2. *В водоеме укреплена вертикальная труба с гладкой внутренней поверхностью, вдоль которой герметично может скользить легкий поршень. Нижний конец трубы погружен*

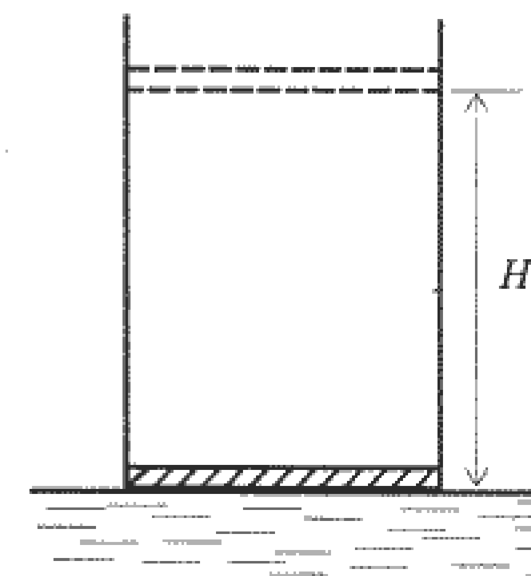

Рис. 1

в воду (рис.1). Поршень, лежавший вначале на поверхности воды, медленно поднимают на высоту $H = 15$ м. Найдите работу, которую необходимо при этом совершить. Площадь поршня $S = 1$ дм^2, атмосферное давление $p_0 = 10^5$ Па, плотность воды $\rho = 10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2. Давлением насыщенных паров воды пренебречь.

Если поднять поршень на небольшую высоту h, приложив к нему направленную вертикально вверх силу величиной F, давление поршня на воду уменьшится. Таким образом, на одной и той же горизонтальной плоскости давление в воде под поршнем будет меньше, чем под открытой поверхностью в водоеме. Под действием этой разности давлений вода втягивается в трубу и поднимается на высоту h, в результате чего давление у основания водяного столба, равное сумме давления поршня на воду ($p_0 - F/S$) и гидростатического давления ρgh, станет равным атмосферному p_0:

$$p_0-\frac{F}{S}+\rho gh = p_0.$$

Отсюда находим

$$F = \rho ghS.$$

Заметим, что при высоте подъема воды $h^* = p_0/(\rho g) = 10$ м давление поршня на воду станет равным нулю, гидростатическое давление станет равным атмосферному давлению и поршень оторвется от воды. Между водой и нижней поверхностью поршня возникнет увеличивающееся пустое пространство (считается, что водяного пара или другого газа в этом пространстве нет). Минимальная сила, которую следует прикладывать к поршню при дальнейшем его подъеме, постоянна и равна p_0S.

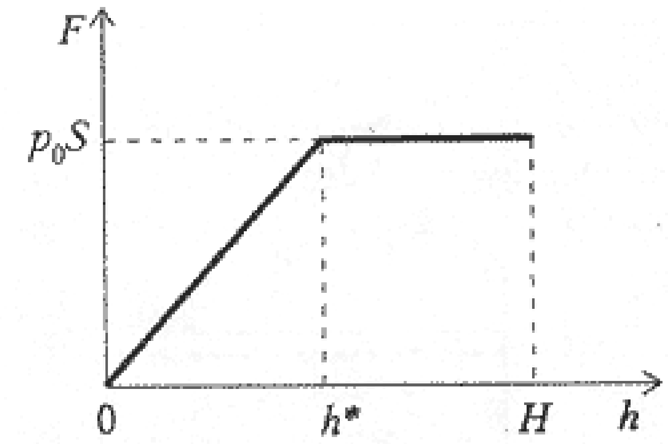

Рис. 2

Зависимость величины F от h представлена в виде графика на рисунке 2. Площадь под графиком и равна искомой работе:

$$A = \frac{1}{2}p_0Sh^* + p_0S\left(H - h^*\right) = $$
$$= p_0S\left(H - \frac{h^*}{2}\right) = $$
$$= p_0S\left(H - \frac{p_0}{2\rho g}\right) = 10^4 \text{ Дж}.$$

Задача 3. *Лыжник съезжает с нулевой начальной скоростью, не отталкиваясь палками, со склона холма по прямой, составляющей некоторый угол с горизонтальной плоскостью, и, проехав по склону расстояние $s_0 = 60$ м, останавливается, увязнув в снегу. Условия движения таковы, что сила сопротивления, действующая на лыжника со стороны снега, пропорциональна пройденному пути; коэффициент пропорциональности $k = 6{,}4$ Н/м. Найдите величину максимальной скорости лыжника при спуске, если его масса с инвентарем $m = 90$ кг. Сопротивлением воздуха пренебречь.*

На съезжающего по склону холма лыжника действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции, перпендикулярная траектории, и сила сопротивления, равная $F_c = ks$, где s — длина пройденного пути, и направленная по касательной к траектории лыжника противоположно вектору его скорости.

По теореме об изменении кинетической энергии, для отрезка пути $s \le s_0$ имеем

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = A_{\text{тяж}} + A_c.$$

Здесь v — величина скорости лыжника в момент, когда он прошел путь s. Работа постоянной силы тяжести находится по формуле

$$A_{\text{тяж}} = mgs\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = mgs\sin\alpha,$$

где α — угол наклона прямолинейной траектории лыжника к горизонту. Работа силы сопротивления, во-первых, отрицательна (так как сила и перемещение противонаправлены), а во-вторых, — это работа переменной силы. График зависимости F_c от s представляет собой прямую линию, проходящую через начало координат. Как и в задаче 1, площадь под графиком имеет смысл величины соответствующей работы:

$$A_c = -\frac{1}{2}sks = -\frac{ks^2}{2}.$$

Возвращаясь к теореме об изменении кинетической энергии, получаем

$$\frac{mv^2}{2} = mgs\sin\alpha - \frac{ks^2}{2}.$$

Искомая в задаче максимальная скорость соответствует максимальному значению правой части этого равенства. Поскольку правая часть равенства — квадратичная функция пути, ее максимальное значение находится при значении s, равном полусумме путей s_1 и s_2, обращающих ее в ноль. Ясно, что $s_1 = 0$ и $s_2 = (2mg\sin\alpha)/k = s_0$. Таким образом, при $s = s_0/2 = (mg\sin\alpha)/k$ кинетическая энергия лыжника максимальна:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = mg\frac{s_0}{2}\sin\alpha - \frac{k(s_0/2)^2}{2} = \frac{ks_0^2}{8}.$$

Отсюда находим искомую скорость:

$$v_{\max} = \frac{s_0}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} = 8 \text{ м/с}.$$

При расчете работы силы сопротивления принят во внимание линейный рост силы сопротивления с увеличением смещения s. Более того, суммарная сила $(mg\sin\alpha - ks)$ имеет характер квазиупругой возвращающей силы с положением равновесия при $s = s_0/2$. Следовательно, от старта до остановки лыжник движется по гармоническому закону, достигая максимальной скорости в положении $s = s_0/2$, причем $s_0/2$ — максимальное смещение от положения равновесия (амплитуда колебаний). Из кинематики гармонических колебаний известна связь амплитуд скорости и смещения:

$$v_{\max} = \frac{s_0}{2}\omega,$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ — циклическая частота колебаний. Таким образом, результат для $v_{\max}$ можно получить и в терминах амплитуд колеблющихся величин.

* * *

Особый интерес представляет теорема об изменении кинетической энергии для системы нескольких взаимодействующих тел, движущихся относительно друг друга. Рассмотрим случай двух взаимодействующих тел.

Пусть $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на тело 1 массой m_1 со стороны тела 2 массой m_2, а $\vec{F}_{21}$ — сила, действующая на тело 2 со стороны тела 1. В соответствии с третьим законом Ньютона,

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}.$$

Пусть также $\vec{F}_1$ — сумма всех сил, действующих на тело 1 со стороны всех тел, кроме тела 2, т.е. это есть сумма всех внешних сил, приложенных к телу 1. Аналогичный смысл имеет сила $\vec{F}_2$ в отношении тела 2. Для каждого из двух тел запишем теорему об элементарном приращении его кинетической энергии:

$$\Delta\left(\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2}\right) = \vec{F}_{12}\vec{v}_1\Delta t + \vec{F}_1\vec{v}_1\Delta t,$$

$$\Delta\left(\frac{m_2\vec{v}_2^2}{2}\right) = \vec{F}_{21}\vec{v}_2\Delta t + \vec{F}_2\vec{v}_2\Delta t.$$

Складывая почленно эти равенства, с учетом третьего закона Ньютона, находим

$$\Delta\left(\frac{m_1\vec{v}_1^2}{2} + \frac{m_2\vec{v}_2^2}{2}\right) =$$
$$= \vec{F}_{12}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right)\Delta t + \vec{F}_1\vec{v}_1\Delta t + \vec{F}_2\vec{v}_2\Delta t.$$

В левой части этого равенства записано элементарное приращение кинетической энергии системы двух тел. Первое слагаемое в правой части — это вычисленная в системе отсчета, связанной с телом 2, элементарная работа силы, действующей на тело 1 со стороны тела 2. Второе и третье слагаемые — это элементарные работы внешних сил.

Теперь — задача.

Задача 4. *На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой m_1. На доску со скоростью v въезжает шайба массой m_2 (рис.3). Какой должна быть минимальная длина доски l, чтобы шайба не соскользнула с нее? Коэффициент трения скольжения между шайбой и доской μ, размер шайбы мал по сравнению с длиной доски.*

Запишем теорему об изменении кинетической энергии системы тел m_1

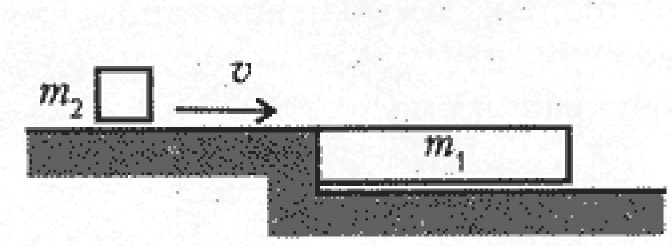

Рис. 3

и m_2:

$$\frac{(m_1+m_2)u^2}{2}-\frac{m_2v^2}{2}=-\mu m_2gl.$$

Величину u конечной скорости шайбы и доски можно найти из закона сохранения импульса

$$m_2v=(m_1+m_2)u.$$

Решая эти два уравнения, находим окончательно

$$l=\frac{v^2}{2\mu g}\frac{m_1}{m_1+m_2}.$$

Конечно, можно было бы решить задачу, опираясь на теорему об изменении кинетической энергии для каждого тела. В таком случае соответствующая система уравнений имеет вид

$$\frac{m_1u^2}{2}=F_{тр}s_1,$$

$$\frac{m_2u^2}{2}-\frac{m_2v^2}{2}=-F_{тр}s_2,$$

$$m_2v=(m_1+m_2)u,$$

$$s_2-s_1=l,$$

$$F_{тр}=\mu m_2g,$$

где s_1 и s_2 — величины перемещений тел *1* и *2* соответственно относительно неподвижной системы отсчета. Решая эту систему уравнений, приходим к тому же ответу на вопрос задачи, что и в первом варианте ее решения.

* * *

В заключение рассмотрим задачу, в которой теорема об изменении кинетической энергии используется наоборот: по известному приращению кинетической энергии находится работа.

Задача 5. *Найдите коэффициент полезного действия водометного двигателя реактивного катера, движущегося с постоянной скоростью. Площадь входного отверстия двигателя S_1, выходного S_2.*

Выберем систему отсчета, связанную с катером. Пусть через двигатель ежесекундно проходит масса μ воды, причем попадает она в двигатель со скоростью v_1 (это скорость движения катера), а выходит со скоростью v_2. Импульс этой массы воды за секунду увеличивается на $\mu(v_2-v_1)$, следовательно, сила тяги двигателя равна $F=\mu(v_2-v_1)$, а его полезная мощность — $N_1=Fv_1=\mu(v_2-v_1)v_1$. Полная мощность двигателя равна приращению кинетической энергии воды, прошедшей через двигатель в единицу времени:

$$N_2=\frac{\mu}{2}\left(v_2^2-v_1^2\right).$$

Коэффициент полезного действия η двигателя равен отношению полезной мощности к полной:

$$\eta=\frac{N_1}{N_2}=\frac{2v_1}{v_1+v_2}.$$

Из условия неразрывности струи воды и несжимаемости воды $\rho S_1v_1=\rho S_2v_2$ следует, что

$$\eta=2\frac{S_2}{S_1+S_2}.$$

Заметим, что при решении задачи в системе отсчета, связанной с берегом, полезная мощность двигателя по-прежнему будет равна $N_1=\mu(v_2-v_1)v_1$. Полная же мощность N_2' будет расходоваться на преодоление силы сопротивления, которая по величине равна силе тяги, и на ежесекундное увеличение кинетической энергии воды, скорость которой при прохождении через двигатель увеличивается от 0 до v_2-v_1, т.е.

$$N_2'=\mu(v_2-v_1)v_1+\frac{\mu(v_2-v_1)^2}{2}=\frac{\mu\left(v_2^2-v_1^2\right)}{2}=N_2.$$

Таким образом, величина коэффициента полезного действия водометного двигателя в обеих системах отсчета определяется одним и тем же соотношением.

Упражнения

1. Когда тело двигалось вниз по наклонной плоскости, на высоте H от ее основания оно имело скорость v_1, а когда оно двигалось вверх после упругого удара о стенку у основания плоскости, его скорость на той же высоте H была равна v_2 (рис.4). Определите скорость тела при ударе о стенку.

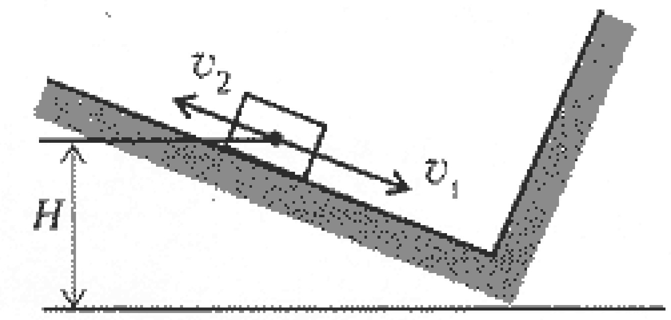

Рис. 4

2. Однородный брусок, скользящий по гладкой горизонтальной поверхности, попадает на шероховатый участок этой поверхности шириной l, коэффициент трения о который μ. При какой минимальной начальной скорости брусок преодолеет шероховатый участок поверхности?

3. Кабина лифта массой $m=3\cdot10^3$ кг опускается с постоянной скоростью $v=10$ м/с. Внезапно происходит полная остановка барабана, с которого сматывается трос. Найдите максимальное удлинение троса, если коэффициент упругости для той его длины, при которой произошла остановка барабана, равен $k=10^6$ Н/м.

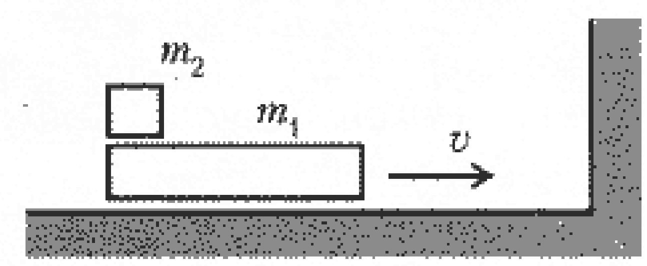

Рис. 5

4. По гладкой горизонтальной плоскости стола равномерно со скоростью v скользит доска массой m_1 вместе с расположенной на ней небольшой шайбой массой m_2 (рис.5). После абсолютно упругого столкновения доски с вертикальной неподвижной стеной шайба перемещается по доске на l. Определите коэффициент трения скольжения между шайбой и доской.

5. Оцените мощность двигателя, необходимую для поддержания в воздухе вертолета массой $M=500$ кг с лопастями длиной $l=3$ м. Считайте, что весь воздух под вращающимися лопастями движется однородным потоком вниз. Давление и температура воздуха равны, соответственно, $p=10^5$ Па и $T=300$ К, молярная масса воздуха $M=29$ г/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

ПОПРАВКА

В статье «Решим относительно параметра» («Квант» №4 за 1997 г.) в решении задачи 4 допущена ошибка. Начиная со второго абзаца на с.44 должен быть следующий текст:

«Второе из полученных уравнений при $a>0$ противоречит ограничениям, так как для его положительных корней $a>x^2$, а при $a=0$ всем условиям удовлетворяет $x=0$.

Первое уравнение не имеет корней при $a<3/4$, имеет отрицательные корни при $3/4\le a<1$ и имеет один неотрицательный корень $x=\left(-1+\sqrt{4a-3}\right)/2$ при $a\ge1$, удовлетворяющий условию $a>x^2$.

Ответ. $x=0$ при $a=0$, $x=\left(-1+\sqrt{4a-3}\right)/2$ при $a\ge1$, при остальных a корней нет.»

В ответе к задаче 12 — опечатка. Следует читать:

«**Ответ.** $(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(2;+\infty)$».