ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТАТИВ

Математический маятник на наклонных поверхностях

П.ХАДЖИ, А.МИХАЙЛЕНКО

ПРЕДЛАГАЕМ вам рассмотреть несколько частных случаев из жизни математического маятника с длиной нити L и массой подвешенного к ней грузика m.

Наклонная плоскость. Пусть математический маятник расположен на абсолютно гладкой поверхности, наклоненной под углом α к вертикали (рис.1,*а*). В положении равновесия на тело маятника действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз, натяжение нити $\vec{N}$, направленное по нити, и реакция опоры $\vec{Q}$, перпендикулярная плоскости. Проектируя все силы вдоль наклонной плоскости и перпендикулярно к ней, получаем

$$N = mg\cos\alpha\,,\quad Q = mg\sin\alpha\,.$$

При отклонении нити от равновесного положения на небольшой угол φ маятник начнет двигаться по дуге окружности на наклонной плоскости. При этом нормальная составляющая силы тяжести сохраняет свое значение, а сила натяжения нити меняется по величине. Ответственной за создание возвращающей силы F является проекция силы тяжести на наклонную плоскость. Из рисунка 1,*б*, на котором изображены действующие на маятник силы в проекции на наклонную плоскость, видно, что

$$F = mg\cos\alpha\sin\varphi\,.$$

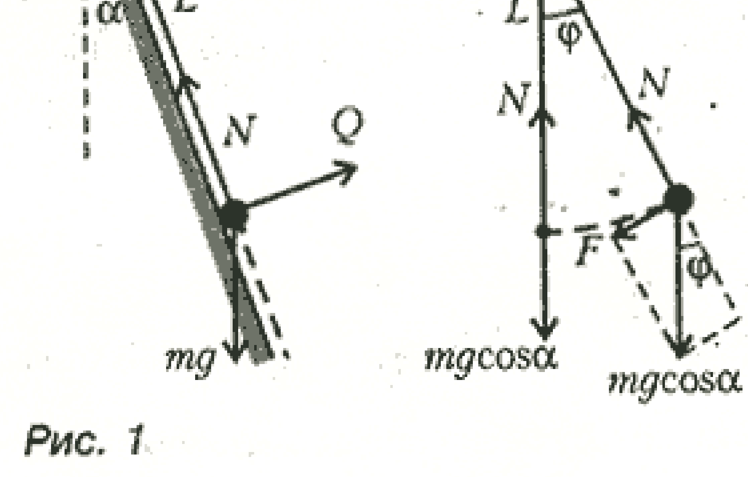

Рис. 1

Считая колебания малыми ($\varphi \ll 1$), получаем

$$F = mg\cos\alpha\cdot\varphi = mg\cos\alpha\cdot\frac{x}{L}\,,$$

где x — длина дуги окружности, вдоль которой движется грузик маятника. Таким образом, возвращающая сила F пропорциональна смещению x из положения равновесия и направлена в сторону, противоположную смещению. Сравнивая полученный результат с известными соотношениями для обычного маятника, легко прийти к выводу, что частота колебаний математического маятника на наклонной плоскости выражается формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\cos\alpha}\,.$$

При $\alpha = 0$ для частоты колебаний снова получаем известное выражение $\omega = \sqrt{g/L}$. С ростом угла наклона плоскости α частота колебаний монотонно убывает, обращаясь в ноль при $\alpha = 90^\circ$ (это связано с тем, что проекция силы тяжести на наплонную плоскость убывает с ростом угла α).

Внутренняя поверхность полусферы. Представим себе, что математический маятник прикреплен в некоторой точке

A с внутренней стороны абсолютно гладкой полусферы радиусом R (рис.2). Точка A расположена на окружности большого круга, ось симметрии полусферы вертикальна. Предполагается, что $L < \sqrt{2}R$. Найдем частоту малых колебаний маятника.

Грузик маятника при колебаниях перемещается вдоль дуги окружности,

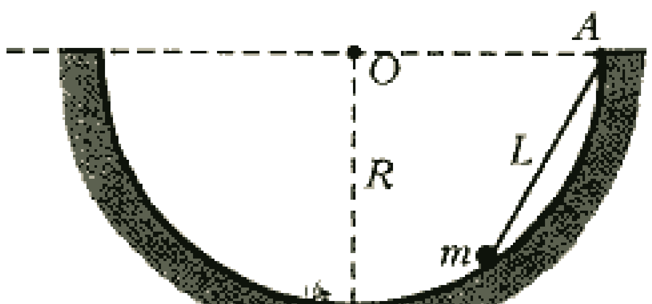

Рис. 2

плоскость которой перпендикулярна большому кругу полусферы. Из простых геометрических соображений следует, что радиус этой окружности

$$r = L\sqrt{1 - \frac{L^2}{4R^2}}.$$

Маятник на полусфере эквивалентен обычному математическому маятнику с длиной нити, равной r. Поэтому частота малых колебаний маятника на полусфере равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L\sqrt{1 - L^2/(4R^2)}}}.$$

Отсюда следует, что частота колебаний определяется длиной нити L и радиусом полусферы R. При $L = \sqrt{2}R$ получаем известную формулу для частоты малых колебаний свободного тела в полусфере: $\omega = \sqrt{g/R}$. При $L \ll R$ (либо при $L \to 0$) получаем выражение для частоты колебаний традиционного математического маятника. Это обусловлено тем, что участок поверхности полусферы, где происходят колебаний, при $L \ll R$ вырождается в вертикальную плоскость. С увеличением длины нити L частота колебаний монотонно убывает и при $L = \sqrt{2}R$ достигает приведенного выше минимального значения.

Внутренняя поверхность прямого кругового конуса. Рассмотрим математический маятник, который подвешен в некоторой точке A с внутренней стороны абсолютно гладкого прямого кругового конуса, где радиус окружности в сечении конуса равен R (рис.3). Ось конуса OO' расположена вертикально, угол между образующей конуса и осью равен α. Определим частоту малых колебаний нашего маятника. Для этого используем энергетический подход.

В положении равновесия нить маятника ориентирована вдоль образующей конуса. Введем прямоугольную систему координат с началом в точке O, где ось X направлена вдоль прямой OA, ось Z совпадает с осью конуса, а ось Y перпендикулярна к ним. Координаты точки подвеса маятника в процессе колебаний не меняются и равны $x_A = R$, $y_A = 0$, $z_A = 0$. Координаты точки B, в которой находится грузик маятника в положении равновесия, равны соответственно

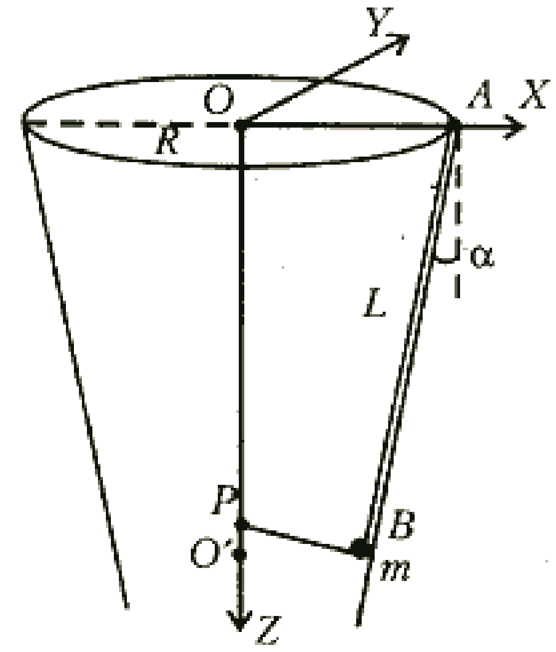

Рис. 3

$$x_B^0 = R - L\sin\alpha,\ y_B^0 = 0,\ z_B^0 = L\cos\alpha.$$

Из этих выражений следует очевидное равенство

$$L^2 = \left(x_B^0 - x_A\right)^2 + \left(y_B^0 - y_A\right)^2 + \left(z_B^0 - z_A\right)^2.$$

Выведем маятник из положения равновесия, отклонив нить на некоторый угол. Будем характеризовать положение грузика маятника углом φ, который образует радиус $O'B$ при отклонении нити. Критерием малости колебаний здесь будет, как обычно, неравенство $\varphi \ll 1$. При отклонении нити от положения равновесия грузик слегка поднимается вверх, приобретая таким образом потенциальную энергию относительно положения равновесия. Обозначим высоту подъема грузика через h. Координаты грузика при этом изменяются и оказываются равными

$$x_B = (R - L\sin\alpha)\cos\varphi,$$
$$y_B = (R - L\sin\alpha)\sin\varphi,$$
$$z_B = L\cos\alpha - h.$$

Отметим, что в силу малости угла φ малой будет и высота подъема грузика, причем критерий малости h можно получить из условия малого изменения координаты z_B по сравнению с z_B^0.

Выразим длину нити L через сумму квадратов разностей соответствующих координат верхнего и нижнего концов нити (т.е. точек A и B) при смещении грузика из положения равновесия:

$$L^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2.$$

Отсюда после соответствующих преобразований получаем

$$h = \frac{2R(R - L\sin\alpha)}{L\cos\alpha}\sin^2\frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2}\frac{R(R - L\sin\alpha)}{L\cos\alpha}\varphi^2.$$

Тогда сообщенная маятнику потенциальная энергия равна

$$E_p = mgh = \frac{1}{2}mg\frac{R(R - L\sin\alpha)}{L\cos\alpha}\varphi^2.$$

Определим теперь кинетическую энергию движения грузика при прохождении им положения равновесия. В этот момент грузик двигается со скоростью $v = \Omega\rho$, где Ω — угловая скорость вращения, а ρ — радиус окружности BP, перпендикулярной к нити. Из рисунка 3 видно, что $\rho\cos\alpha = R - L\sin\alpha$. Учитывая еще, что $\Omega = \omega\varphi$, где ω — частота колебаний, для кинетической энергии движения грузика получаем

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2\frac{(R - L\sin\alpha)^2}{\cos^2\alpha}\varphi^2.$$

В силу закона сохранения энергии, $E_p = E_k$, откуда для частоты малых колебаний математического маятника на внутренней поверхности прямого кругового конуса находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\frac{\cos\alpha}{1 - (L\sin\alpha)/R}}.$$

Очевидно, что частота колебаний существенно определяется геометрией конуса и длиной нити маятника. Если выражение для ω представить в виде

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}\frac{R\cos\alpha}{\sin\alpha\cdot\left(\frac{R^2}{4\sin^2\alpha} - \left(L - \frac{R}{2\sin\alpha}\right)^2\right)}},$$

то легко видеть, что с ростом L частота сначала убывает, достигая минимального значения

$$\omega_{\min} = \sqrt{\frac{2g\sin\alpha}{R}}$$

при $L = R/(2\sin\alpha)$, а затем снова растет. При $L \to 0$ и при L, приближающемся снизу к $R/\sin\alpha$, частота колебаний неограниченно растет. В первом случае ($L \to 0$) геометрия конуса не играет никакой роли и «поведение» частоты колебаний такое же, как и для традиционного математического маятника.

Заметим, что полученное выражение для частоты имеет физический смысл при условии $L < R/\sin\alpha$. В случае $R = L\sin\alpha$ грузик маятника находится в вершине конуса, где колебания невозможны.