Физика 9—11

Публикуемая ниже заметка «Как подпрыгнуть выше крыши» предназначена девятиклассникам, заметка «Паровой скалолаз, или Термодинамика для альпиниста» – десятиклассникам, «Зачем закрывать отверстие, или Открытие линзы» — одиннадцатиклассникам.

Как подпрыгнуть выше крыши

А.СТАСЕНКО

Выше носа не прыгнешь.

Устаревший экспериментальный факт

ЧТО ЗНАЧИТ ПОДПРЫГНУТЬ? ЭТО сложнейший процесс, сопровождающийся приседанием, распрямлением, отталкиванием носками... и в конце концов приземлением – по возможности «мягким». О прыгании написаны, вероятно, сотни или даже тысячи диссертаций учеными медицинских и физкультурных наук. А сколько рекордов!

У нас более скромная цель: всего лишь подпрыгнуть выше крыши; поэтому нужна простая физическая модель.

Слово «подпрыгнуть» означает, очевидно, отсутствие разбега. Предположим, мы можем в прыжке поднять свой центр масс на высоту $y_m \sim 1$ м над обычным положением (стоя). Поскольку движение происходит в постоянном поле тяготения Земли, легко найти начальную скорость (в момент отрыва):

$$v_0 = \sqrt{2gy_m} \sim 4{,}5 \text{ м/с}$$

и время полета (от отрыва до касания земли):

$$t_0 = 2\sqrt{\frac{2y_m}{g}} \sim 1 \text{ с}.$$

Здесь мы применили хорошо известные законы для движения точечной массы с постоянным ускорением и, конечно, воспользовались очень приятным упрощающим предположением: «сопротивлением воздуха пренебречь».

Но как наш центр масс приобретает скорость v_0? Присев, мы затем распрямляемся в течение некоторого времени τ за счет энергетических затрат собственного организма, так что к моменту отрыва от земли наше тело массой m_0 приобретает кинетическую энергию $m_0 v_0^2/2$. Этот процесс можно изобразить качественно в виде штриховых кривых на рисунке 1.

Но этак слишком высоко не прыгнешь. И тут приходит мысль о Винни-Пухе, который догадался использовать воздушный шарик, чтобы добраться до меда на дереве. Последуем его примеру.

Наполним шар легким газом – водородом плотностью $\rho_V = \frac{2}{29}\rho_0$, где ρ_0 – плотность воздуха. Масса газа в объеме шара равна $m_V = V\rho_V = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_V$, где r – радиус шара. Но и оболочка шара обладает какой-то массой, а именно $m_S = 4\pi r^2 \sigma$, где σ – поверхностная плотность оболочки. Поэтому теперь при распрямлении придется разгонять не только собственную массу, но еще и массу оболочки m_S, и массу водорода в оболочке m_V. И это еще не все. Оказывается, при ускорении любого тела в воздухе (любом другом газе или жидкости) приходится приводить в ускоренное движение и определенную массу окружающей среды – так называемую присоединенную массу. Этот факт качественно отражен на рисунке 2: при перемещении шара вверх закращенный вверху объем воздуха должен как-то очутиться внизу. Если предположить,

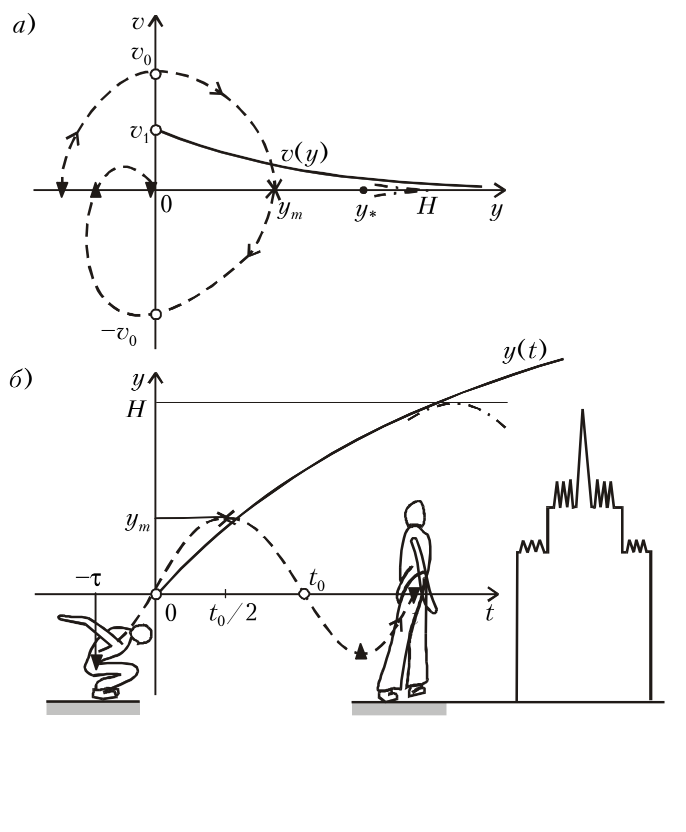

Рис. 1

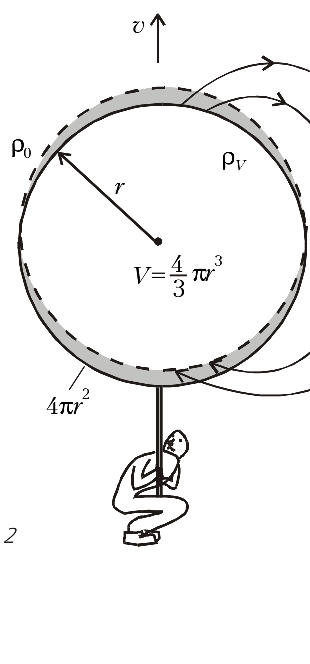

Рис. 2

что наш шарик не деформируется, эта присоединенная масса оказывается в точности равной половине массы воздуха в объеме шарика: $m_* = \rho_0 V/2$.

Таким образом, желающему подпрыгнуть вместе со всем этим устройством нужно будет ускорить суммарную массу $m = m_0 + m_V + m_S + m_*$. Это явно не легче. Да еще придется преодолевать силу сопротивления воздуха шарику, которой теперь уже никак пренебречь нельзя. Эта сила сопротивления пропорциональна площади поперечного сечения шарика, плотности воздуха и квадрату скорости движения. Это легко устанавливается из соображений размерности, а безразмерный коэффициент пропорциональности можно измерить экспериментально. В результате получим

$$F_c = \frac{\pi}{4}\rho_0 r^2 v^2$$

(проверьте, по крайней мере, размерность). И конечно, надо добавить еще подъемную силу Архимеда, равную $\rho_0 Vg$.

Итак, запишем закон движения (второй закон Ньютона) прыгуна в воздухе:

$$ma = -(m_0 + m_V + m_S)g + \rho_0 Vg - \frac{\pi}{4}\rho_0 r^2 v^2. \quad (1)$$

Но, подобно ситуации с Винни-Пухом, в состоянии покоя, когда скорость и ускорение равны нулю, сила Архимеда должна уравновешивать силу притяжения Земли, так что уравнение (1) примет вид

$$\frac{4}{3}\pi r^3(\rho_0 - \rho_V) = m_0 + 4\pi r^2\sigma$$

(любопытно, что при этом условии суммарная инертная масса, которая будет играть роль при ускоренном движении, становится равной $3m_*$).

Если заданы m_0 и σ, получаем кубическое уравнение для определения радиуса шара (желающий да решит его). В частности, отсюда легко найти наименьшее значение этого радиуса. Предположим, что оболочка невесома: $\sigma = 0$. Тогда

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3m_0}{4\pi(\rho_0 - \rho_V)}}.$$

Принимая массу школьника или студента (перед обедом) $m_0 = 50$ кг, а плотность воздуха $\rho_0 = 1$ кг/м^3, получим

$$r_{\min} \approx 2{,}3 \text{ м}.$$

Очевидно, что для подъема весомой оболочки придется увеличить объем шара, добавив еще легкого газа.

Если предположить, что в любом случае прыгун располагает одним и тем же запасом энергии

$$\frac{1}{2}m_0 v_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2,$$

то в момент отрыва от земли будет достигнута явно меньшая скорость (см. рис.1,*а*):

$$v_1 = v_0\sqrt{\frac{m_0}{m}} < v_0.$$

И даже меньшая этой, если учесть еще и затраты энергии на преодоление сопротивления воздуха в процессе распрямления.

И вот мы оттолкнулись от земли и движемся вверх. В уравнении движения осталась только сила сопротивления воздуха:

$$ma = -\frac{\pi}{4}\rho_0 r^2 v^2. \quad (2)$$

Но что такое ускорение? Это изменение скорости со временем: $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$. А что такое скорость? Это изменение перемещения со временем: $v = \frac{\Delta y}{\Delta t}$. Отсюда для ускорения получим выражение

$$a = v\frac{\Delta v}{\Delta y}.$$

Подставим его в уравнение (2) и сократим на v:

$$\frac{\Delta v}{\Delta y} = -\frac{\pi}{4}\frac{\rho_0 r^2}{m}v.$$

Можно переписать это уравнение так, чтобы обе его части стали безразмерными:

$$\frac{\Delta v}{v} = -\frac{\Delta y}{y_*}, \quad (3)$$

где величина $y_* = \frac{4m}{\pi\rho_0 r^2}$ имеет, очевидно, размерность длины. И очевидно, что это не случайный масштаб: он характеризует *темп* изменения скорости с расстоянием. На этом расстоянии скорость заметно изменяется – например, в два раза; точнее, в три раза; еще точнее, в 2,7 раза. Но сейчас это не столь важно. Можно проанализировать уравнение (3) и не решая его.

Прежде всего видно, что скорость убывает с высотой: об этом говорит знак «минус». Далее видно, что эта убыль скорости тем меньше, чем меньше сама скорость. Когда же скорость стремится к нулю, то и ее «приращение» (отрицательное) тоже стремится к нулю. Значит, график $v(y)$ подходит к оси y все ближе, никогда не достигая ее при любом конечном значении y (см. сплошную кривую на рисунке 1,*а*). Получается, что мы все время будем двигаться вверх, правда все медленнее, но нигде не останавливаясь. В итоге зависимость высоты от времени будет иметь вид сплошной кривой на рисунке 1,*б*.

Вспомним, однако, что плотность атмосферы уменьшается с высотой; значит, будет уменьшаться и сила Архимеда, так что рано или поздно мы вернемся на землю. Кроме того, при очень малых скоростях изменится закон сопротивления воздуха. Сила станет пропорциональной уже первой степени скорости и так называемой *вязкости* воздуха, которой мы до сих пор пренебрегали. Но это произойдет при скоростях движения порядка микрометров в секунду. Эта численная оценка получается в предположении абсолютно спокойной атмосферы, а так не бывает. Воздух постоянно находится в движении (горизонтальный ветер, вертикальные перемещения теплого воздуха вверх и холодного вниз – так называемая конвекция). Эти крупномасштабные движения сопровождаются мелкими завихрениями (турбулентностью), в результате чего вязкость движущегося воздуха гораздо больше, чем спокойного, и к тому же непостоянна в пространстве и во времени. Все эти явления наши вдумчивые читатели смогут учесть в дальнейшем – в своих научных работах.

А сейчас, чтобы нам уверенно вернуться вниз, надо отказаться от точного уравновешивания силой Архимеда суммарной силы тяжести своего тела и шара и положить в карман хотя бы спичечный коробок или лучше бутерброд (водород горюч!). Этот небольшой перегрузок позволит кривой $v(y)$ пересечь ось y на некоторой высоте H, превосходящей заданную высоту (например, здания МГУ на Воробьевых горах); значит, начнется движение вниз (штрих-пунктирные линии на рисунке 1). А легкий ветерок перенесет нас через дом, реку, лес... Это уже похоже на приятный прыжок во сне. Так что прыгайте на здоровье!