Возвращающая сила и частота колебаний системы

П.ХАДЖИ, Л.ГЛАЗОВА, В.ЛИЧМАН

Как известно, собственные частоты колебаний различных колебательных систем можно вычислять с помощью закона сохранения энергии. Но это не единственный метод, приводящий к успеху. В ряде случаев более приемлемым может оказаться другой метод – с использованием возвращающей силы, действующей на колебательную систему. Идея здесь состоит в следующем.

Простейшие гармонические колебания совершаются под действием упругой силы, т.е. силы, величина которой пропорциональна смещению x из положения равновесия: $F = kx$, где k – так называемый коэффициент упругости (жесткость) системы, и направлена в сторону, противоположную направлению смещения. Однако часто, рассматривая малые колебания более сложных систем, тоже удается представить возвращающую силу в виде $F = kx$, т.е. пропорциональной смещению из положения равновесия и имеющей вид квазиупругой силы с коэффициентом k, величина которого зависит от параметров системы. Зная коэффициент k и массу m колеблющегося тела, легко найти частоту ω собственных колебаний системы, пользуясь хорошо известной формулой

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Колебания заряженного шарика вдоль вертикальной направляющей

Пусть вдоль непроводящей вертикальной направляющей может двигаться без трения маленький (точечный) шарик массой m, несущий заряд q. В нижнем конце направляющей неподвижно закреплен второй шарик, имеющий заряд Q (рис.1). Определим частоту малых колебаний первого шарика вдоль направляющей.

Случай, когда заряды q и Q являются разноименными, не представляет

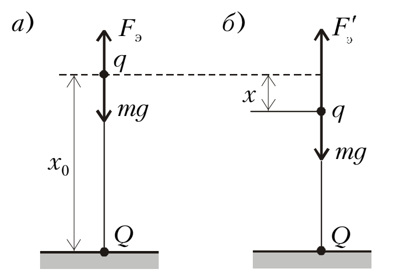

Рис. 1

интереса, поэтому будем считать заряды одноименными. На подвижный шарик действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, и сила электростатического взаимодействия $\vec{F}_э$ со стороны нижнего шарика, направленная вертикально вверх (см. рис.1,*а*). По-видимому, под действием этих сил шарик может находиться в равновесии. Условие равновесия имеет вид

$$F_э = mg.$$

Найдем положение равновесия подвижного шарика, отсчитывая расстояние x_0 от нижнего шарика. В соответствии с законом Кулона сила электростатического отталкивания равна

$$F_э = qQ\Big/\left(4\pi\varepsilon_0 x_0^2\right).$$

Тогда из условия равновесия получаем

$$x_0 = \sqrt{Qq\big/\left(4\pi\varepsilon_0 mg\right)}.$$

Как видно, x_0 тем больше, чем больше величины зарядов Q и q и чем меньше масса подвижного шарика m.

Легко показать, что это равновесие является устойчивым. В самом деле, при смещении шарика вниз сила электростатического отталкивания возрастает, так как уменьшается расстояние между шариками, а сила тяжести не изменяется. Поэтому возникает возвращающая сила, направленная вверх, т.е. против смещения. Если же шарик сместить вверх, то сила отталкивания уменьшается, поэтому возникает возвращающая сила, направленная вниз.

Таким образом, шарик, выведенный из положения равновесия и предоставленный самому себе, будет совершать колебания относительно положения равновесия. Определим частоту ω этих колебаний, считая их малыми. Критерием малости колебаний является малость смещения x относительно положения равновесия по сравнению с характерной длиной в системе, какой является расстояние x_0:

$$x \ll x_0.$$

Сместим подвижный шарик, например вниз, на расстояние x (см. рис.1,*б*). В этом случае на него действует сила отталкивания $\vec{F}'_э$, которая по величине больше $F_э$, и неизменная сила тяжести $m\vec{g}$, поэтому возвращающая сила, равная разности сил отталкивания и тяжести, будет равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{\left(x_0 - x\right)^2} - mg.$$

Приводя к общему знаменателю и расписывая в числителе квадрат разности, получаем

$$F = \frac{qQ\Big/\left(4\pi\varepsilon_0\right) - mg\left(x_0^2 - 2x_0x + x^2\right)}{\left(x_0 - x\right)^2}.$$

Первые два члена в числителе дают в сумме точный ноль, а четвертым слагаемым можно пренебречь по сравнению с третьим. Кроме того, в знаменателе можно пренебречь x по сравнению с x_0. Тогда остается

$$F = \frac{2mg}{x_0}\cdot x.$$

Выражение для возвращающей силы F имеет такой же вид, что и выражение для упругой силы, где роль коэффициента «упругости» играет величина

$$k = \frac{2mg}{x_0} = 4mg\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mg}{qQ}}.$$

Используя формулу для частоты малых колебаний, находим

$$\omega = 2\sqrt{g\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0 mg}{qQ}}}.$$

Частота колебаний заряженного шарика тем меньше, чем больше величины зарядов и чем меньше масса шарика.

Колебания заряженного шарика в поле двух других точечных зарядов

Рассмотрим два маленьких шарика с зарядами q_1 и q_2, закрепленные в точках A и B на расстоянии l друг от друга (рис.2). Вдоль направляющей, соединяющей оба шарика, может двигаться без трения третий шарик массой m и зарядом q. Предполагая все заряды одноименными, определим частоту колебаний среднего шарика.

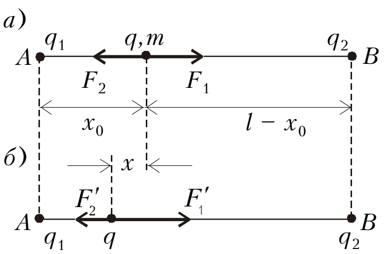

Рис. 2

Так как все заряды одноименные, на средний (подвижный) шарик будут действовать силы отталкивания $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ со стороны зарядов q_1 и q_2 соответственно, направленные в противоположные стороны (см. рис.2,*а*). По-видимому, в этом случае возможно такое расположение среднего шарика, когда обе силы равны по величине и компенсируют друг друга. Точка, в которой при этом располагается средний шарик, и будет положением равновесия.

Выясним, является ли это равновесие устойчивым. Для этого будем смещать шарик относительно положения равновесия вправо или влево. При небольшом смещении влево (см. рис.2,*б*) сила отталкивания $\vec{F}_1'$ со стороны заряда q_1 возрастает, так как расстояние между зарядами q_1 и q уменьшается, а сила отталкивания $\vec{F}_2'$ со стороны заряда q_2 уменьшается, поэтому возникает действующая на средний шарик разность сил, направленная к положению равновесия. Если отпустить шарик, то он начнет перемещаться в направлении положения равновесия. Аналогичная ситуация возникает и при смещении шарика вправо.

Таким образом, можно утверждать, что при продольных смещениях шарика относительно положения равновесия всегда возникает возвращающая сила, направленная в сторону, противоположную смещению. Если шарик предоставить самому себе, то он будет совершать колебания вдоль направляющей. Определим положение равновесия x_0, отсчитывая его от точки A. Используя выражение для закона Кулона, запишем условие равновесия

$$\frac{qq_1}{4\pi\varepsilon_0 x_0^2} = \frac{qq_2}{4\pi\varepsilon_0 (l-x_0)^2},$$

откуда найдем

$$x_0 = \frac{l}{\left(1+\sqrt{q_2/q_1}\right)}.$$

Видно, что расстояние x_0 от точки A до положения равновесия подвижного шарика пропорционально расстоянию l между двумя крайними (закрепленными) шариками и зависит только от отношения величин зарядов q_2/q_1 этих шариков.

Найдем теперь частоту малых колебаний среднего шарика. Под малыми будем понимать такие колебания, при которых смещение из положения равновесия намного меньше характерного расстояния в системе. В качестве такового здесь следует принять x_0 либо $l-x_0$ (меньшее из них). Таким образом, критерий малости колебаний имеет вид

$$x \ll x_0,\ l-x_0.$$

Предположим, что подвижный шарик сместился влево на расстояние x от положения равновесия (см. рис.2,*б*). Тогда силы отталкивания со стороны зарядов q_1 и q_2 будут равны соответственно

$$F_1' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_1}{(x_0-x)^2}$$

и

$$F_2' = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_2}{(l-x_0+x)^2},$$

а возвращающая сила, равная их разности и направленная к положению равновесия, будет равна

$$F = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{(x_0-x)^2} - \frac{q_2}{(l-x_0+x)^2}\right).$$

Из этого выражения явно не видно, что возвращающая сила имеет квазиупругий характер, тем не менее при малых значениях отклонения x (в рамках критерия малости) она действительно является квазиупругой. Для того чтобы это показать, приведем выражение для F к общему знаменателю, распишем подробнее выражение в числителе, воспользуемся условием равновесия и критерием малости колебаний. В результате получим

$$F = \frac{q\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^4}{2\pi\varepsilon_0\sqrt{q_1q_2}\,l^3}\cdot x.$$

Эта формула уже похожа на выражение для квазиупругой силы. Коэффициент пропорциональности перед x выполняет роль коэффициента «упругости» k. Тогда для частоты малых колебаний находим

$$\omega = \frac{\left(\sqrt{q_1}+\sqrt{q_2}\right)^2}{l}\sqrt{\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 ml\sqrt{q_1q_2}}}.$$

Частота колебаний симметрично, но сложным образом, зависит от величин зарядов q_1 и q_2.

Колебания шара в жидкости

Определим частоту малых вертикальных колебаний шара, погруженного в жидкость (рис.3), пренебрегая сопротивлением жидкости и присоединенной массой.

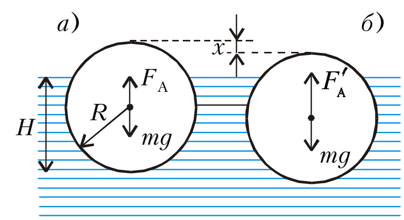

Рис. 3

В положении равновесия на шар действуют две силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и выталкивающая, или архимедова, сила $\vec{F}_A$ со стороны жидкости (см. рис.3,*а*). Они равны по величине и противоположны по направлению. В проекции на вертикальную ось условие равновесия выражается формулой

$$mg = F_A.$$

Поскольку

$$m = 4/3\,\pi\rho R^3$$

и

$$F_A = \pi\rho_1 gH^2(3R-H)/3,$$

где ρ – плотность шара и ρ_1 – плотность жидкости, получаем

$$4\rho R^3 = \rho_1 H^2(3R-H).$$

Отсюда при заданных R и H можно определить отношение плотностей ρ/ρ_1.

Выведем шар из положения равновесия, дополнительно погрузив его в жидкость на глубину x (см. рис.3,*б*). В этом случае выталкивающая сила увеличивается по сравнению с равновесной, за счет чего возникает возвращающая сила, равная

$$F = F_{\text{А}}' - mg .$$

Так как полная глубина погружения шарового сегмента теперь равна $H + x$, то

$$F_{\text{А}}' = \pi\rho_1 (H + x)^2 (3R - H - x)/3 ,$$

и

$$F = \pi\rho_1 gx\left(H(2R - H) + (R - H)x - 1/3\,x^2\right).$$

Критерием малости колебаний здесь является неравенство $x \ll H$. Тогда вторым и третьим слагаемыми можно пренебречь в силу их малости, и для возвращающей силы получаем

$$F = \pi\rho_1 gH(2R - H)\cdot x .$$

Следовательно, возвращающая сила пропорциональна смещению из положения равновесия x и, как отмечалось, направлена в сторону, противоположную этому смещению.[1] Под действием этой силы шар совершает колебательное движение: то погружаясь, то всплывая. Коэффициент перед x играет роль коэффициента «упругости» k, поэтому частота колебаний шара в жидкости будет равна

$$\omega = \sqrt{3\frac{2R - H}{3R - H}\frac{g}{H}} .$$

Частота колебаний полностью определяется радиусом шара и глубиной его погружения в условиях равновесия.

В принципе можно выразить частоту колебаний и через отношение плотностей ρ и ρ_1.

[1] *Легко увидеть, что возвращающая сила равна $\rho_1 gSx$, где $S = \pi H(2R - H)$ – площадь сечения шара поверхностью жидкости (в положении равновесия). Именно на столько изменяется вес вытесненной жидкости при дополнительном погружении шара на малую глубину x. (Прим. ред.)*

Комбинированный маятник

Представим себе жесткий невесомый стержень длиной L, к нижнему концу которого подвешено точечное тело массой m, а на расстоянии l от оси вращения к стрежню прикреплена пружинка с коэффициентом упругости k, которая в положении равновесия маятника не деформирована (рис.4). Определим частоту малых колебаний такого маятника.

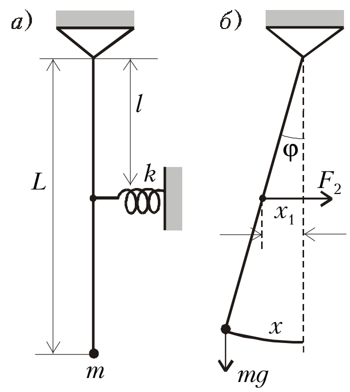

Рис. 4

В положении равновесия стержень маятника располагается вдоль вертикали (см. рис.4,*а*). Отклоним стержень относительно вертикали на небольшой угол φ, такой, что $\varphi \ll 1$ (критерий малых колебаний). В этом положении на грузик маятника действует сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вниз, а на стержень в точке крепления пружинки действует сила упругости, равная $F_2 = kx_1$, где $x_1 = \varphi l$ – линейное смещение этой точки стержня относительно положения равновесия. При малых углах отклонения сила $\vec{F}_2$ направлена практически горизонтально. Возвращающая сила, действующая непосредственно на грузик, направлена по касательной к его траектории движения (окружности) и определяется выражением

$$F_1 = mg\sin\varphi \approx mg\varphi = mgx/L ,$$

где x – смещение грузика вдоль дуги окружности. Из рисунка 4,*б* видно, что $x_1/x = l/L$.

Поскольку силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ приложены к разным точкам системы, ясно, что ни одна из них не является результирующей возвращающей силой. Чтобы определить эту силу, поступим следующим образом. Найдем полный момент сил M, действующий на систему и возвращающий ее в положение равновесия:

$$M = F_1 L + F_2 l = (mgx/L)L + (klx/L)l .$$

Считая теперь, что этот момент сил действует непосредственно на колеблющийся грузик маятника, найдем результирующую возвращающую силу F, деля момент сил M на плечо этой силы L:

$$F = \left(\frac{mg}{L} + \frac{kl^2}{L^2}\right)\cdot x .$$

Роль коэффициента упругости здесь играет весь множитель в скобках перед x, поэтому для частоты колебаний находим

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\frac{l^2}{L^2}} .$$

Видно, что частота колебаний комбинированного маятника определяется как геометрией маятника, т.е. длинами L и l, так и массой грузика m. Если положить $k = 0$ (пружинка отсутствует) либо $l = 0$ (пружинка прикреплена к оси маятника и не действует на стержень), то получаем известное выражение для частоты колебаний математического маятника $\omega = \sqrt{g/L}$.