# Кинематика в планиметрии

**_В.РЫЖИК, Б.СОТНИЧЕНКО_**

В САМЫХ РАЗНЫХ СБОРНИКАХ ГЕОМЕТРИЧЕСких задач можно встретить задачи такого рода: берется некий треугольник (четырехугольник) и на его сторонах строятся какие-либо треугольники (четырехугольники). Оказывается, что полученная конфигурация обладает особыми свойствами, каковые и предлагается обнаружить.

Методы решения этих задач чаще всего вполне стандартные. Но бывает, что используют векторы или преобразования. Мы хотим показать еще один способ решения задач такого типа. Основан он будет на векторах, но только рассматриваться эти векторы будут с кинематической точки зрения, как радиусы-векторы какой-то движущейся точки.[1] При этом мы опишем достаточно общий метод получения результатов. Да и сами результаты будут обладать некоторой степенью общности.

Для понимания дальнейшего необходимы некоторые сведения о векторах на плоскости.

Кроме хорошо известных линейных операций с векторами – сложения и умножения на число, нам понадобится еще одна линейная операция – поворот вектора на заданный угол. Если вектор $\vec a$ поворачивается на угол $\alpha$, то в результате получается вектор, который мы будем обозначать так: $\vec a^{\alpha}$. При этом угол $\alpha$ может быть положительным – при повороте против часовой стрелки – и отрицательным – при повороте по часовой стрелке. Свойства этой операции таковы:

1°. $\left|\vec a^{\alpha}\right| = \left|\vec a\right|$.

2°. $\vec a^{0} = \vec a$, $\vec a^{\pi} = -\vec a$, $\vec a^{2\pi} = \vec a$.

3°. $\left(\vec a + \vec b\right)^{\alpha} = \vec a^{\alpha} + \vec b^{\alpha}$.

4°. $\left(\lambda \vec a\right)^{\alpha} = \lambda\left(\vec a^{\alpha}\right)$.

Свойства 3° и 4° означают линейность операции поворота вектора.

5°. $\left(\vec a^{\alpha}\right)^{\beta} = \vec a^{\alpha+\beta}$.

Иначе говоря, если мы сначала поворачиваем вектор на угол $\alpha$, а потом на угол $\beta$, то это означает, что мы повернули его на угол $\alpha + \beta$.

6°. $\vec a^{\alpha+\beta} = \vec a^{\beta+\alpha}$.

Иначе говоря, поворот вектора на суммарный угол можно выполнять в любом порядке – результат не изменится.

7°. $\left(\vec a^{\alpha}\right)^{-\alpha} = \vec a$.

Переходим теперь к кинематическим фактам. Пусть $\vec r$ – радиус-вектор движущейся точки, а $\vec V$ – ее скорость. Тогда справедливы следующие утверждения:

8°. Если $\vec r = \overrightarrow{\text{const}}$, то $\vec V = \vec 0$.

9°. Если $\vec r = \vec r_1 + \vec r_2$, то $\vec V = \vec V_1 + \vec V_2$.

10°. Если $\vec V = \vec V_1 + \vec V_2$, то $\vec r = \vec r_1 + \vec r_2 + \overrightarrow{\text{const}}$.

11°. Если $\vec r_2 = \lambda \vec r_1$, то $\vec V_2 = \lambda \vec V_1$.

12°. Если $\vec V_2 = \lambda \vec V_1$, то $\vec r_2 = \lambda \vec r_1 + \overrightarrow{\text{const}}$.

13°. Если $\vec r_2 = \vec r_1^{\,\alpha}$, то $\vec V_2 = \vec V_1^{\,\alpha}$.

14°. Если $\vec V_2 = \vec V_1^{\,\alpha}$, то $\vec r_2 = \vec r_1^{\,\alpha} + \overrightarrow{\text{const}}$.

Доказательства равенств 1°–14° приведены в упомянутой выше книге. По сути своей равенства 8°–14° сводятся к дифференцированию и интегрированию вектора-функции. Заметим, что постоянный вектор в равенствах 10°, 12°, 14° зависит от выбора начала радиусов-векторов. Это значит, что при разных началах радиусов-векторов константа меняется. В остальных равенствах выбор начала не имеет значения, т.е. если равенство верно при выборе начала в какой-то точке, то оно верно и тогда, когда начало выбрано в любой другой точке.

Заметим также, что хотя для задания положения движущейся точки радиусом-вектором начало его может быть выбрано произвольно, для задания ее скорости это не существенно. В самом деле, посмотрим на рисунок 1. На нем изображена движущаяся точка $M$, а также два ее радиуса-вектора с началами в разных точках $O_1$ и $O_2$: $\overrightarrow{O_1M} = \vec r_1$, $\overrightarrow{O_2M} = \vec r_2$. Из рисунка видно, что $\vec r_2 = \overrightarrow{O_2O_1} + \vec r_1$, где вектор $\overrightarrow{O_2O_1}$ является постоянным. Дифференцируя это равенство по времени, мы получим, что производные радиусов-векторов $\vec r_1$ и $\vec r_2$ равны. Это и будет скорость точки $M$.

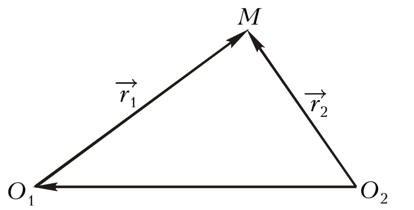



*Рис. 1*

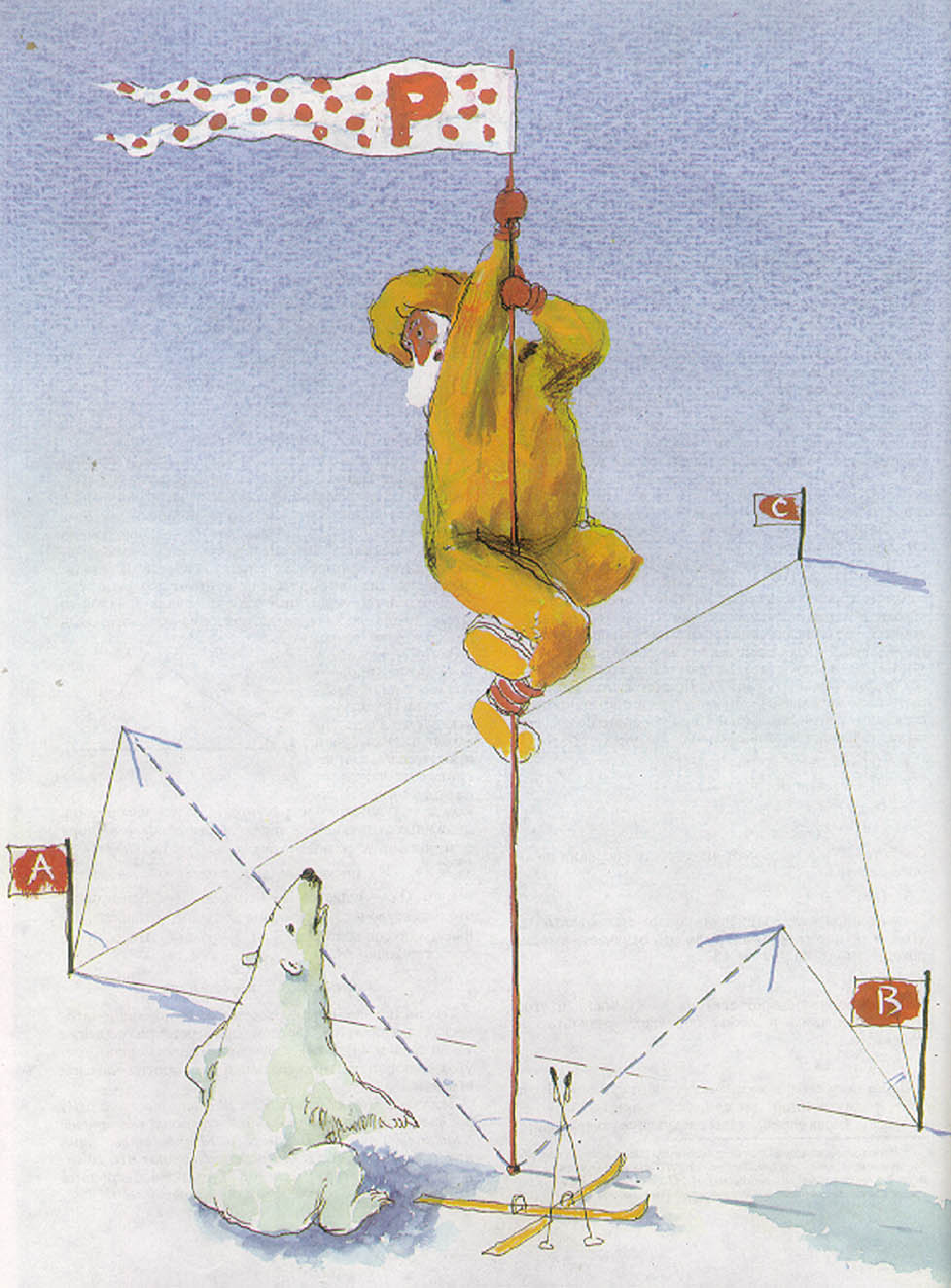
### Кинематика в треугольнике

Теперь покажем, как работает векторно-кинематическая техника, на частном примере, при решении такой задачи. (В дальнейшем ориентация вершин треугольников и четырехугольников – против часовой стрелки.)

**Задача 1.** *На сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ во внешнюю от треугольника сторону построены квадраты (рис.2). Точки $N$ и $M$ – центры этих квадратов, а точка $K$ – середина стороны $AB$. Докажите, что треугольник $NKM$ – равнобедренный прямоугольный с прямым углом при вершине $K$.*

---

[1] *Необходимая теория для использования этого метода подробно описана в книге: Ю.И.Любич, Л.А.Шор. «Кинематический метод в геометрических задачах» (М.: Наука, 1976). Из этой же книги взяты некоторые приведенные дальше задачи.*


P
C
A
B

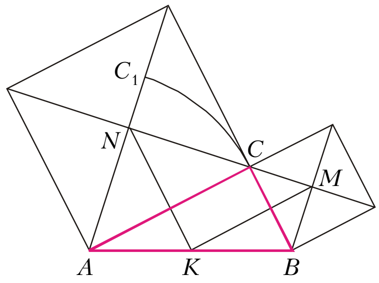



*Рис. 2*

**Решение.** Заметим, что в результате поворота вектора $\overline{AC}$ на 45° вокруг точки $A$ точка $C$ переходит в точку $C_1$, лежащую на диагонали квадрата, построенного на стороне $AC$: $\overline{AC_1} = \overline{AC}^{45^\circ}$. В результате поворота вектора длина его не меняется, а потому $AC_1 = AC$. Так как $AN = AC \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$, то $AN = AC_l \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$. Отсюда имеем, что $\overline{AN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AC}^{45^\circ}$.

Аналогично получаем, что $\overline{BM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{BC}^{-45}$.

Начнем двигать точку $C$ по плоскости, оставив сторону $AB$ неподвижной. Проследим, что будет происходить при этом с центрами построенных квадратов – точками $N$ и $M$.

В процессе движения точки $C$ (согласно 13°) будет выполняться равенство

$$\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{45^\circ}. \qquad (1)$$

(В последнем равенстве радиусы-векторы имеют начало в точке $A$.)

Аналогичными рассуждениями, взяв начало в точке $B$, получаем, что $\vec{V}_M = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{-45^\circ}$, откуда $\vec{V}_C = \sqrt{2}\vec{V}_M^{45}$. Подставив полученное выражение для вектора $\vec{V}_C$ в равенство (1), выводим (используя 5°), что $\vec{V}_N = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\vec{V}_M^{45^\circ}\right)^{45^\circ} = \vec{V}_M^{90^\circ}$.

Из этого равенства следует (согласно 14°), что $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{90^\circ} + \vec{R}$, где $\vec{R}$ – некоторый постоянный вектор, т.е. вектор, который не меняется при движении точки $C$. Поэтому, если при некотором положении точки $C$ окажется, что $\vec{R} = \vec{0}$, то $\vec{R} = \vec{0}$ и при любом другом положении точки $C$, а тогда $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{90^\circ}$ также при любом положении точки $C$.

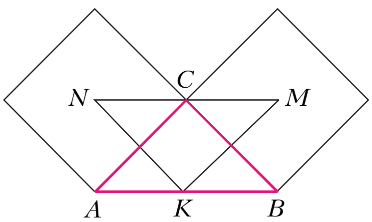



*Рис. 3*

Поместим точку $C$ в положение, когда она является вершиной равнобедренного прямоугольного треугольника $BCA$ (рис.3). Тогда, очевидно, центры квадратов – точки $M$ и $N$ – и середина отрезка $AB$ – точка $K$ – являются вершинами равнобедренного прямоугольного треугольника $NKM$, т.е. $\vec{r}_N = \vec{r}_M^{90^\circ}$ (если за начало радиусов-векторов принять точку $K$). Следовательно, в этом положении точки $C$ имеем $\vec{R} = \vec{0}$, а по сказанному выше $\vec{R} = \vec{0}$ при любом положении точки $C$. Но тогда треугольник $NKM$ – равнобедренный прямоугольный также при любом положении точки $C$.

Прежде чем двинуться дальше, отметим, что важную роль здесь сыграло нахождение «хорошей точки» (мы будем называть ее полюсом) для начала радиусов-векторов (такой точкой оказалась точка $K$).

Перейдем теперь к решению более общей задачи.

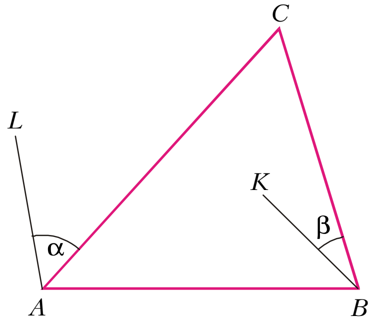



*Рис. 4*

**Задача 2** (теоретическая). *Пусть нам дан треугольник $ABC$, $AB = c$. Пусть отрезок $AL$ расположен так, что $\angle LAC = \alpha$ и $AL : AC = m$, а отрезок $BK$ – так, что $\angle KBC = \beta$ и $BK : BC = n$ (рис.4). (На этом рисунке углы $\alpha$, $\beta$ положительны – для определенности, на самом деле это не принципиально.) Пусть точка $O_1$ – произвольная точка плоскости. Обозначим $\overline{O_1L} = \vec{r}_L$, $\overline{O_1K} = \vec{r}_K$. Требуется найти соотношение между $\vec{r}_L$ и $\vec{r}_K$ через $m$, $n$, $\alpha$, $\beta$, точнее, выразить $\vec{r}_L$ через $\vec{r}_K$ и эти параметры.*

**Решение.** Вектор $\overline{AL}$ является образом вектора $\overline{AC}$ в результате поворота его на угол $\bar{\alpha}$ и умножения на число $m$. Таким образом,

$$\overline{AL} = m\overline{AC}^{\alpha}. \qquad (2)$$

Аналогично,

$$\overline{BK} = n\overline{BC}^{\beta}. \qquad (3)$$

Теперь закрепим вершины $A$, $B$ треугольника $ABC$ и будем двигать точку $C$ со скоростью $\vec{V}_C$. Скорости точек $K$ и $L$ обозначим $\vec{V}_K$, $\vec{V}_L$ соответственно. Из (2) и (3) получаем такие равенства:

$$\vec{V}_L = m\vec{V}_C^{\alpha}, \qquad (4)$$

$$\vec{V}_K = n\vec{V}_C^{\beta}. \qquad (5)$$

Из (5) получим, что

$$\vec{V}_C = \frac{1}{n}\vec{V}_K^{-\beta}. \qquad (6)$$

Подставим полученное в (6) значение для $\vec{V}_C$ в (4) и получим

$$\vec{V}_L = m\vec{V}_C^{\alpha} = m\left(\frac{1}{n}\vec{V}_K^{-\beta}\right)^{\alpha} = \frac{m}{n}\vec{V}_K^{\alpha-\beta}. \qquad (7)$$

Переходя к соотношению между радиусами-векторами, получим (используя 14°)

$$\vec{r}_L = \frac{m}{n}\vec{r}_K^{\alpha-\beta} + \vec{R}. \qquad (8)$$

Тем самым мы решили поставленную задачу – нашли соотношение между векторами $\vec{r}_L$ и $\vec{r}_K$. Так как постоянный вектор $\vec{R}$ зависит от выбора начала радиусов-векторов $\vec{r}_L$, $\vec{r}_K$, то попытаемся подходящим выбором начала обратить этот вектор в нулевой. Тогда, если удастся найти такую «хорошую точку», формула (8) примет вид

$$\vec{r}_L = \frac{m}{n}\vec{r}_K^{\alpha-\beta}.$$

Иначе говоря, если нам удастся обратить постоянный вектор $\vec{R}$ в нулевой (за счет выбора начала радиусов-векторов в некоторой точке $P$, которую мы будем называть полюсом), то в любой момент времени, т.е. при любом положении точки $C$, отрезок $KL$ будет виден из полюса $P$ под углом $\alpha - \beta$, а отрезки $PL$ и $PK$

Иллюстрация П.Чернуского

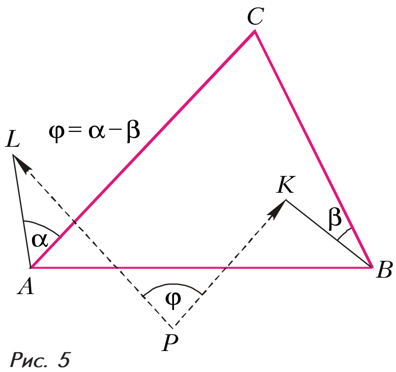



*Рис. 5*

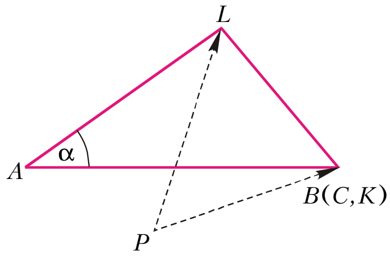



*Рис. 6*

будут относиться как $m : n$, т.е.

$$PL : PK = m : n.$$

Можно даже записать точнее (рис.5):

$$\overrightarrow{PL} = \frac{m}{n}\overrightarrow{PK}^{\alpha-\beta}. \quad (9)$$

Задача сводится к нахождению полюса $P$, т.е. к однозначному определению его положения относительно неподвижного (в процессе движения точки $C$) отрезка $AB$. Для этого будем искать определяющий момент времени. В частности, такой момент наступит тогда, когда точка $C$ совпадет с точкой $B$ или с точкой $A$. Докажем это.

Рассмотрим случай (рис.6), когда точка $C$ совпадает с точкой $B$. Тогда и точка $K$ совпадает с точкой $B$. (Иначе говоря, треугольник $BCK$ вырождается в точку.) Сначала заметим, что из равенства (9) для векторов $\overrightarrow{PL}$ и $\overrightarrow{PK}$ следует, что

$$PL = \frac{m}{n}PK.$$

Далее, по теореме косинусов из треугольника $KLA$ находим

$$KL = c\sqrt{1+m^2-2m\cos\alpha}.$$

Теперь можем найти отрезки $PK$ и $PL$. Сначала по теореме косинусов из треугольника $PKL$ находим

$$KL = PK\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2-2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)},$$

откуда

$$PK = \frac{KL}{\sqrt{1+\left(\frac{m}{n}\right)^2-2\frac{m}{n}\cos(\alpha-\beta)}}. \quad (10)$$

Тогда

$$PL = \frac{m}{n}PK = \frac{KL}{\sqrt{\left(\frac{n}{m}\right)^2+1-2\frac{n}{m}\cos(\alpha-\beta)}}.$$

В результате найдены три стороны в треугольнике $PKL$, и тем самым положение полюса $P$ можно установить. Но по трем сторонам можно построить два треугольника, поэтому надо следить за соответствующей ориентацией угла между векторами $\overrightarrow{PK}$ и $\overrightarrow{PL}$ – она должна соответствовать знаку разности $\alpha-\beta$.

Выделим из общего решения три частных случая: 1) $\alpha-\beta=0^\circ$: а) $m = n$; б) $m \ne n$; 2) $\alpha-\beta=180^\circ$. Случай 1,а) несколько особый, мы рассмотрим его позже. В случаях 1,б и 2 векторы $\overrightarrow{PL}$ и $\overrightarrow{PK}$ коллинеарны, причем в случае 1,б они сонаправлены, а в случае 2 – противоположно направлены. Отсюда следует, что в случае 1,б точка $P$ лежит вне отрезка $KL$, а в случае 2 точка $P$ лежит на отрезке $KL$. Проиллюстрируем случаи 1,б и 2 на конкретных задачах.

**Случай $\alpha-\beta=0^\circ$; $m \ne n$.** Так как угол между отрезками $PK$ и $PL$ в этом случае равен 0°, то треугольник $PLK$ вырождается в отрезок. По формуле (10) получаем

$$PK = \frac{KL}{\left|1-\frac{m}{n}\right|} \quad \left(\text{или } PL = \frac{m}{n}PK\right).$$

В этом случае полюс $P$ лежит на прямой $KL$ вне отрезка $KL$. Положение точки $P$ относительно точек $K$, $L$ зависит от величины $m/n$ и устанавливается однозначно.

В дальнейшем мы постоянно используем результаты и обозначения этой задачи ($\alpha, \beta, P$).

**Задача 3.** *На сторонах треугольника ABC построены прямоугольные треугольники CLA и BCK с острыми углами* $\alpha$ *и* $\gamma$ *(рис.7). Точка Q лежит на прямой, проходящей через точку A и перпендикулярной прямой AB. При этом* $AQ = AB\,\mathrm{tg}\,\gamma$*. Докажите, что точки Q, L, K лежат на одной прямой и* $QL : QK = \cos^2\alpha$.

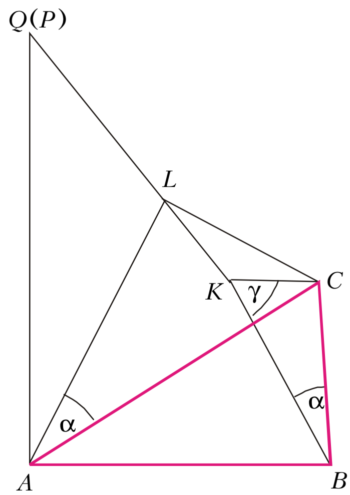



*Рис. 7*

**Решение.** В этой задаче $\alpha-\beta=0^\circ$, $m=\cos\alpha$, $n = 1/\cos\alpha$ ($m \ne n$). Значит, полюс $P$, точки $L$ и $K$ лежат на одной прямой и при этом $PL : PK = m : n = \cos^2\alpha$. Осталось доказать, что полюс $P$ совпадает с точкой $Q$. Для этого воспользуемся обоими определяющими положениями точки $C$. Сначала совместим точку $C$ с точкой $A$ (рис.8). Новое положение точки $C$ – $C_1$ – и новое положение точки $L$ – $L_1$ – совпадут с точкой $A$, а точка $K$ займет положение $K_1$ (треугольник $ACL$ вырождается в точку). В этом случае полюс $P$ лежит на одной прямой с точками $L_1$, $K_1$, в данной ситуации – на перпендикуляре к $AB$, проходящем через точку $A$. Затем совместим точку $C$ с точкой $B$. Тогда новое положение точки $C$ – $C_2$ – и новое положение точки $K$ – $K_2$ – совпадут с точкой $B$, а точка $L$ займет положение $L_2$ (треугольник $BCK$ вырождается в точку). В этом случае полюс $P$ лежит на одной прямой с точками $L_2, K_2$. Оказывается, что полюс $P$ является точкой пересечения прямых $K_1L_1$ и $K_2L_2$, т.е. точкой $Q$. Отсюда и следует, что $AQ = AB\,\mathrm{tg}\,\gamma$.

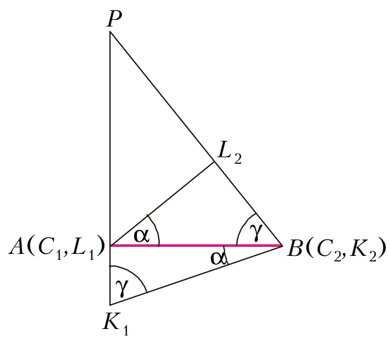



*Рис. 8*

(Вместо того, чтобы брать два определяющих момента, можно взять только один из них и использовать отношение $m : n$.)

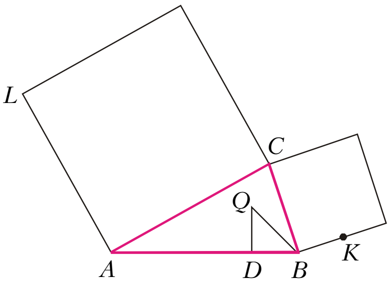


*Рис. 9*

**Случай $\alpha - \beta = 180°$**. В этом случае треугольник $PLK$ вырождается в отрезок, и искомый полюс $P$ лежит внутри отрезка $LK$ и делит его в отношении $m : n$.

**Задача 4.** *На сторонах треугольника $ABC$ построены квадраты (рис.9). Точка $L$ – вершина одного квадрата, а точка $K$ – середина стороны другого. Точка $Q$ – вершина равнобедренного прямоугольного треугольника $QDB$, катеты которого $BD = DQ = (1/3)AB$. Докажите, что точки $L$, $Q$ и $K$ лежат на одной прямой и точка $Q$ делит отрезок $LK$ в отношении 2 : 1.*

**Решение.** Здесь $\alpha = 90°$, $\beta = -90°$, $m = 1$, $n = 1/2$. Поскольку в этой задаче $\alpha - \beta = 180°$ и $m/n = 2$, то искомый полюс $P$ лежит на отрезке $LK$ и делит его в отношении 2 : 1. Осталось только доказать, что полюс находится в точке $Q$, которая указана в условии задачи.

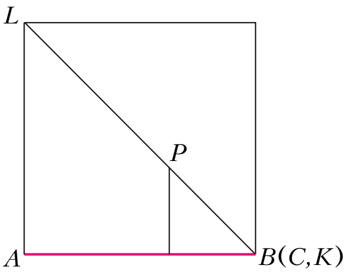


*Рис. 10*

Совместим точку $C$ с точкой $B$ (рис.10). Квадрат, построенный на стороне $BC$, вырождается в точку. Полюс $P$ должен лежать на диагонали $LB$ квадрата, построенного на стороне $AB$, и делить $LB$ в отношении 2 : 1, т.е. $PB = 0{,}5PL = (1/3)BL$. Отсюда $BD = (1/3)AB$, а точки $P$ и $Q$ совпадают.

**Общий случай.** Рассмотрим теперь решение конкретной задачи в общем случае, когда $\alpha \neq \beta$ и $m \neq n$.

**Задача 5.** *На сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ построены прямоугольные треугольники $CLA$ и $BKC$ с острым углом 30° (рис.11). Точка $Q$ делит отрезок $AB$ в отношении $AQ : QB = 3 : 1$. Докажите, что треугольник $LQK$ прямоугольный.*

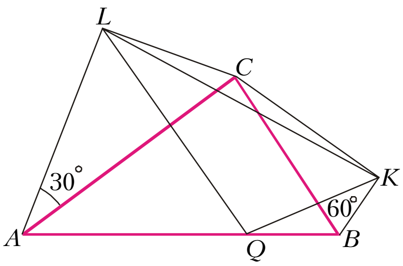


*Рис. 11*

**Решение.** Здесь мы имеем такие соотношения: $\alpha = 30°$, $\beta = -60°$, $\alpha - \beta = 90°$, $m = AL/AC = \cos 30° = \sqrt{3}/2$, $n = BK/BC = \cos 60° = 1/2$, $m/n = \sqrt{3}$. Найдем полюс $P$ в этом случае. Совместим точку $C$ с точкой $B$. При этом треугольник $BKC$ выродится в точку, треугольник $CLA$ займет положение, показанное на рисунке 12. В данном случае, поскольку $\alpha - \beta = 90°$ и $m/n = \sqrt{3}$, полюс $P$ является вершиной прямого угла прямоугольного треугольника с гипотенузой $BL$ и отношением катетов $PL : PK = m/n = \sqrt{3}$. Легко проверить, что точка $Q$, заданная в условии задачи, отвечает этим требованиям.

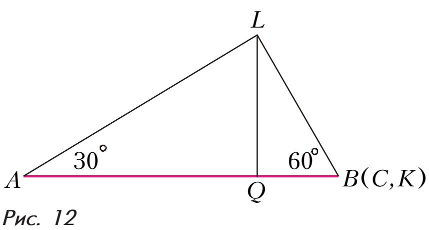


*Рис. 12*

Тем самым получается, что полюс $P$ совпадает с точкой $Q$. Отсюда и следует, что треугольник $LQK$ – прямоугольный.

В самом общем случае отыскание полюса $P$ сводится к задаче нахождения точки пересечения двух окружностей (или двух дуг окружностей). Одна из них – множество точек, из которых отрезок $KL$ виден под углом $\alpha - \beta$. Другая – множество точек, для которых отношение расстояний до двух данных точек $K$, $L$ постоянно и равно $m/n$, это окружность Аполлония.

Теперь ясно, что возможны и другие специальные случаи, отличные от вышеприведенных трех. Например, при $m = n$ окружность Аполлония заменяется на серединный перпендикуляр отрезка $KL$, а при $\alpha - \beta = 90°$ полюс $P$ лежит на окружности с диаметром $KL$. Из этих рассуждений ясно, что полюс существует всегда, за исключением единственного случая, когда $\alpha - \beta = 0°$ и $m = n$. Можно сказать, что здесь полюс «уходит в бесконечность».

В этом случае можно воспользоваться формулой (8), которая примет вид $\vec{r}_L = \vec{r}_K + \vec{R}$, или $\vec{r}_L - \vec{r}_K = \vec{R}$, что равносильно равенству $\overrightarrow{KL} = \vec{R}$ (в таком случае говорят, что отрезок $KL$ движется поступательно). Последнее равенство означает, что вектор $\overrightarrow{KL}$ не зависит от положения точки $C$.

**Задача 6.** *На сторонах треугольника $ABC$ построены прямоугольные треугольники $CLA$ и $CKB$ с острыми углами $\alpha$ и $\gamma$ (рис.13). Докажите, что $KL = AB\cos\gamma$ и $KL$ образует с прямой $AB$ угол $\gamma$.*

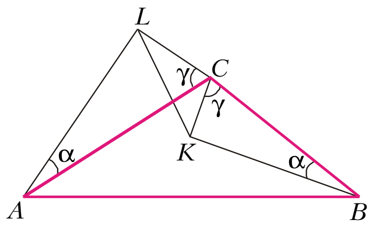


*Рис. 13*

**Решение.** В этой задаче $\alpha - \beta = 0°$, $m = n = \cos\alpha$, т.е. $\overrightarrow{KL} = \vec{R}$. В качестве определяющего положения точки $C$ выберем такое, когда она совмещена с точкой $B$. Тогда и точка $K$ совпадет с точкой $B$ (треугольник $BCK$ вырождается в точку). При этом $KL = AB\cos\gamma$ и образует с прямой $AB$ угол $\gamma$, что и требовалось доказать (рис.14).

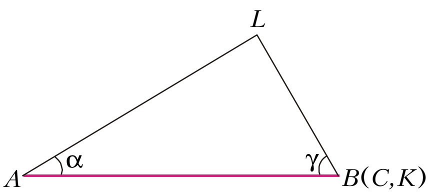


*Рис. 14*

Из разобранных задач ясно, что главный момент решения – нахождение полюса относительно заданного в условии треугольника. Более того, становится ясно, как составлять задачи такого рода. Можно взять треугольник, два «хороших» угла $\alpha$ и $\beta$ (например такие, чтобы их разность была 0°, 90° или 180°), два удобных числа, найти при этих данных полюс. Затем указать три точки, соответствующие выбранным углам, числам и полюсу. И сформулировать задачу о взаимном положении полученных трех точек. Попробуйте!

(Напоминаем, что ориентация вершин треугольников и четырехугольников – против часовой стрелки.

Кроме того, вершина прямого угла треугольника в обозначении треугольника записывается посередине.)

**Упражнения**

**1.** На сторонах $AC$ и $BC$ треугольника $ABC$ построены равнобедренные треугольники $ALC$ ($AL = CL$) и $BKC$ ($BK = KC$) с углом 30° при основании. Докажите, что $KL = \frac{AB}{\sqrt{3}}$. Найдите угол между прямыми $KL$ и $AB$.

**2.** На сторонах $AB$, $BC$ и $CA$ треугольника $ABC$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники $ABQ$ ($AB = BQ$), $BKC$ ($BK = KC$) и $LCA$ ($CA = CL$). Докажите, что точки $Q$, $K$, $L$ лежат на одной прямой и точка $K$ делит отрезок $QL$ пополам.

**3.** На стороне $AC$ треугольника $ABC$ построен равнобедренный треугольник $ACL$ ($AL = CL$) с углами при основании, равными 30°, а на стороне $BC$ – прямоугольный треугольник $KCB$ с прямым углом при вершине $C$ и углом 30° при вершине $B$. Точка $Q$ делит сторону $AB$ в отношении $AQ : QB = 1 : 2$. Докажите, что треугольник $KLQ$ – прямоугольный с прямым углом при вершине $L$ и углом 60° при вершине $Q$.

**4.** На сторонах $AB$ и $AC$ треугольника $ABC$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники $ABQ$ и $LAC$ с прямыми углами при вершинах $B$ и $A$ соответственно. Точка $K$ лежит на продолжении стороны $BC$ ($BK = BC$). Докажите, что треугольник $KQL$ – прямоугольный равнобедренный с прямым углом при вершине $Q$.

### Кинематика в четырехугольнике

Аналогичные соображения используются, когда исходной фигурой является четырехугольник. Посмотрим на решение такой задачи.

**Задача 7.** *В трапеции $ABCD$ основание $AB$ в два раза больше основания $CD$ (рис.15). На боковых сторонах трапеции вне трапеции построены прямоугольные равнобедренные треугольники $DLA$ и $BKC$. Из середины $M$ основания $AB$ проведен вне трапеции перпендикуляр $MQ$ такой, что $MQ = \frac{1}{4}AB$. Докажите, что отрезки $QL$ и $QK$ равны и взаимно перпендикулярны.*

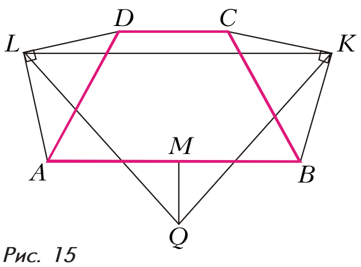


*Рис. 15*

**Решение.** Прежде всего из данных задачи заметим, что

$$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AD}^{45^\circ} \text{ и } \overrightarrow{BK} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{BC}^{-45^\circ}.$$

Теперь, не двигая основания $AB$, будем поступательно перемещать основание $CD$. При таком перемещении $\vec{V}_D = \vec{V}_C$. Из этих соотношений получаем, что $\vec{V}_L = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_D^{45^\circ}$, $\vec{V}_K = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_C^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{V}_D^{-45^\circ}$. Отсюда $\vec{V}_D = \vec{V}_C = \sqrt{2}\vec{V}_K^{45^\circ}$. Поэтому выполняется равенство $\vec{V}_L = \vec{V}_K^{90^\circ}$. Но тогда выполняется соотношение $\vec{r}_L = \vec{R}_K^{90^\circ} + \vec{R}$. Следовательно, существует такая точка $P$, что $\vec{R} = \vec{0}$, т.е.

$$\overrightarrow{PL} = \overrightarrow{PK}^{90^\circ}. \qquad (11)$$

Найдем положение этой точки $P$. В качестве определяющего возьмем такое положение основания $CD$, при котором отрезки $KC$, $CD$, $DL$ окажутся на одной прямой $KL$, их объединение будет отрезком $KL$, равным и параллельным $AB$, и четырехугольник $ABKL$ будет прямоугольником (рис.16).

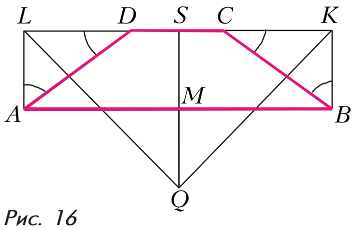


*Рис. 16*

При этом окажется – это легко показать, – что $LA = KB = \frac{1}{4}AB$. Если теперь построить точку $Q$ так, как указано в условии задачи, и продлить отрезок $QM$ до пересечения его с $KL$ в точке $S$, то, очевидно, получим, что $QS = 2QM = SL = SK$ и $SQ \perp KL$. Последнее означает, что треугольники $QSL$ и $KSQ$ равные между собой, прямоугольные и равнобедренные. Отсюда заключаем, что $\angle LQK = 90^\circ$ и $QK = QL$. Сравнивая последние равенства с равенством (11), мы видим, что точки $P$ и $Q$ совпадают.

Следовательно, это выполняется и в любом другом положении.

**Упражнения**

**5.** В четырехугольнике $ABCD$ сторона $CD$ вдвое меньше стороны $AB$ и образует с ней угол 60°. На сторонах $BC$ и $AD$ построены равнобедренные треугольники $BKC$ ($BK = KC$) и $ADL$ ($LA = LD$) с углами 30° при основании, а на стороне $AB$ – прямоугольный треугольник $AQB$ с углом 60° при вершине $A$, углом 30° при вершине $B$ и прямым углом при вершине $Q$. Докажите, что треугольник $QKL$ равносторонний.

**6.** В четырехугольнике $ABCD$ сторона $CD$ вдвое меньше стороны $AB$ и образует с ней угол 60°. На сторонах $BC$ и $AD$ построены подобные прямоугольные треугольники $KCB$ и $ADL$ с углами 30° при вершинах $B$ и $A$ и прямыми углами при вершинах $C$ и $D$. Докажите, что треугольник $AKL$ равносторонний.

**7.** В трапеции $ABCD$ основание $CD$ вдвое меньше основания $AB$. На ее боковых сторонах $AD$ и $BC$ построены равнобедренные прямоугольные треугольники $ADL$ и $BCK$ с гипотенузами $AL$ и $BK$ соответственно. Найдите отношение отрезков $KL$ и $AB$, а также угол между ними.

### Приращения и скорости

Теперь мы перейдем к получению новых, но вполне очевидных векторных соотношений. Пусть точки $A$ и $B$ движутся в плоскости таким образом, что все время выполняется равенство

$$\vec{V}_B = m\vec{V}_A^{\alpha}, \qquad (12)$$

где $m$ и $\alpha$ – постоянные. Из равенства (12) получаем интегрированием уравнение

$$\vec{r}_B = m\vec{r}_A^{\alpha} + \vec{R}. \qquad (13)$$

Постоянную $\vec{R}$ найдем из следующих начальных условий: пусть при $t = 0$ (в начальный момент времени) $\vec{r}_A = \vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_B = \vec{r}_{B_0}$. Подставляя значения $\vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_{B_0}$ в (13), получим

$$\vec{R} = \vec{r}_{B_0} - m\vec{r}_{A_0}^{\alpha}.$$

Тогда равенство (13) приводится к равенству

$$\vec{r}_B - \vec{r}_{B_0} = m\left(\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0}\right)^{\alpha}. \qquad (14)$$

Но разности векторов $\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0}$ и $\vec{r}_B - \vec{r}_{B_0}$ есть векторы перемещений точек $A$ и $B$:

$$\vec{r}_A - \vec{r}_{A_0} = \Delta\vec{r}_A, \quad \vec{r}_B - \vec{r}_{B_0} = \Delta\vec{r}_B,$$

т.е. вместо (14) запишем равенство

$$\Delta\vec{r}_B = m\Delta\vec{r}_A^{\,\alpha}. \qquad (15)$$

Таким образом, мы доказали лемму: *если при движении точек A и B в плоскости выполняется равенство (12) или (13) (включая случай, когда постоянный вектор является нулевым), то выполняется равенство (15).*

Теперь вернемся к равенствам (4), (5), (7). Из них, соответственно, следуют равенства

$$\Delta\vec{r}_L = m\Delta\vec{r}_C^{\,\alpha}, \quad \Delta\vec{r}_K = n\Delta\vec{r}_C^{\,\beta}, \quad \Delta\vec{r}_L = \frac{m}{n}\Delta\vec{r}_K^{\,(\alpha-\beta)}. \qquad (16)$$

Собственно говоря, равенства (4), (5), (7) являются частными случаями соответственных равенств (16), если положить начальные радиусы-векторы точек $K$, $L$, $C$ равными нуль-вектору:

$$\vec{r}_{C_0} = \vec{r}_{K_0} = \vec{r}_{L_0} = \vec{0}.$$

Перейдем к примерам использования полученных соотношений.

**Задача 8.** *Вернемся к задаче 6 и дадим ее решение в новой технике.*

**Решение.** Из треугольника $ACL$ (см. рис.13) имеем равенство $\overrightarrow{CL} = \cos\gamma\left(\overrightarrow{CA}^{-\gamma}\right)$, что соответствует (13) при $\vec{R} = \vec{0}$. Поэтому, если оставлять точку $C$ неподвижной, то, согласно лемме, $\overrightarrow{\Delta r_L} = \cos\gamma\overrightarrow{\Delta r_A}^{-\gamma}$. Переместим точку $A$ в точку $B$: $\overrightarrow{\Delta r_A} = \overrightarrow{AB}$. При этом точка $L$ переместится в точку $K$: $\overrightarrow{\Delta r_L} = \overrightarrow{LK}$. Но тогда $\overrightarrow{LK} = \cos\gamma\left(\overrightarrow{AB}^{-\gamma}\right)$, т.е. $LK = AB\cos\gamma$ и образует с $AB$ угол $\gamma$.

**Задача 9.** *На сторонах произвольного четырехугольника ABCD построены равнобедренные прямоугольные треугольники $DL_1A$, $CK_1D$, $BL_2A$, $CK_2B$ (рис.17). Требуется доказать, что отрезки $K_1K_2$ и $L_1L_2$ взаимно перпендикулярны и равны.*

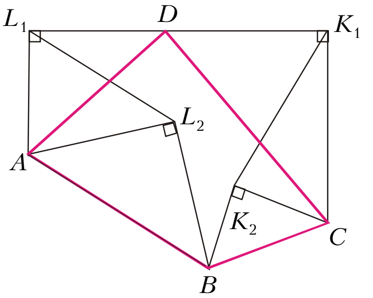



Рис. 17

**Решение.** Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник $DL_1A$. Из него получаем

$$\angle L_1AD = \alpha = 45^\circ,$$

$$AL_1 : AD = m = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Рассмотрим прямоугольный равнобедренный треугольник $CK_1D$. Из него получаем

$$\angle K_1CD = \beta = -45^\circ, \quad CK_1 : CD = n = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Таким образом, $m : n = 1$, $\alpha - \beta = 90^\circ$.

Переместим теперь точку $D$ в точку $B$. Тогда точка $L_1$ переместится в точку $L_2$, а точка $K_1$ переместится в точку $K_2$. Отсюда векторы перемещений точек $D$, $L_1$ и $K_1$ равны

$$\Delta\vec{r}_D = \overrightarrow{DB}, \quad \Delta\vec{r}_{L_1} = \overrightarrow{L_1L_2}, \quad \Delta\vec{r}_{K_1} = \overrightarrow{K_1K_2}.$$

Осталось воспользоваться формулами (16):

$$\overrightarrow{L_1L_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}, \quad \overrightarrow{K_1K_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{-45^\circ}, \quad \overrightarrow{L_1L_2} = \overrightarrow{K_1K_2}^{90^\circ}.$$

Последнее равенство показывает нам перпендикулярность прямых $K_1K_2$ и $L_1L_2$ и равенство отрезков $K_1K_2$ и $L_1L_2$.

**Задача 10.** *На сторонах AD, BC и на диагоналях AC, BD параллелограмма ABCD построены равнобедренные прямоугольные треугольники DLA, CMB, CNA, DKB соответственно (прямые углы – в точках L, K, N, M). Докажите, что KMNL – квадрат (рис.18).*

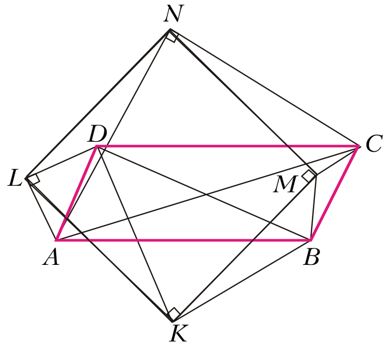



Рис. 18

**Решение.** Рассмотрим треугольник $DLA$. В этом треугольнике выполняется равенство $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DA}^{-45^\circ}$.

Рассмотрим перемещение этого треугольника такое, при котором точка $D$ остается неподвижной, а точка $A$ перемещается в точку $B$. При таком перемещении точка $L$ попадет в точку $K$. При этом $\Delta\vec{r}_A = \overrightarrow{AB}$, $\Delta\vec{r}_L = \overrightarrow{LK}$. Тогда из леммы приходим к равенству

$$\overrightarrow{LK} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ}.$$

Точно так же, рассматривая треугольник $ABC$ и построенные на его сторонах треугольники $CNA$ и $CMB$, мы получим, рассматривая аналогичное перемещение, что

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ}. \qquad (17)$$

Из двух последних равенств мы видим, что $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{LK}$, поэтому $KMNL$ – параллелограмм.

Аналогично можно доказать, что верно равенство $\overrightarrow{KM} = \overrightarrow{LN} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DC}^{45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{45^\circ}$ (так как $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$). Сравнивая полученные выражения для $KM$ и $LK$, видим, что $KM = LK$, а потому $KMNL$ – ромб.

И, наконец, $KMNL$ – квадрат. В самом деле, из равенства $\overrightarrow{KM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{45^\circ}$ мы получаем равенство $\overrightarrow{AB} = \sqrt{2}\overrightarrow{KM}^{-45^\circ}$. Подставим найденное значение для $\overrightarrow{AB}$ в равенство (17) и получим

$$\overrightarrow{NM} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AB}^{-45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\overrightarrow{KM}^{-45^\circ}\right)^{-45^\circ} = \overrightarrow{KM}^{-90^\circ}.$$

Из этого равенства видим, что угол $NMK$ прямой. Но тогда ромб $KMNL$ является квадратом.

В заключение можно заметить, что задача обобщается на произвольный четырехугольник. На двух его сторонах и диагоналях строятся соответствующим образом подобные треугольники и четыре их вершины оказываются вершинами параллелограмма.

Рассмотренная идея решения имеет некую модификацию. Проиллюстрируем ее на такой задаче.

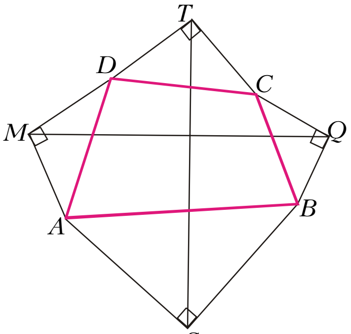



Рис. 19

**Задача 11.** *Дан четырехугольник ABCD. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники DMA, CTD, BQC, ASB (рис.19). Докажите, что отрезки MQ и ST равны и взаимно перпендикулярны.*

**Решение.** Переместим точку $M$ в точку $Q$ в два приема. Сначала переместим точку $D$ в точку $B$, оставляя точку $A$ неподвижной. Тогда точка $M$ займет некое положение $M_1$ (рис.20). Поскольку при этом $m = AM : AD = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = 45^\circ$, то

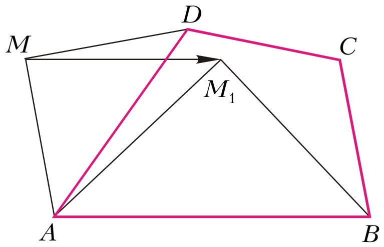



Рис. 20

$$(\Delta\vec{r}_M)_1 = \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Delta\vec{r}_D^{\,45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}, \text{ т.е. } \overrightarrow{MM_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{45^\circ}.$$

Затем, не двигая точку $B$, совместим точку $A$ с точкой $C$. При этом точка $M_1$ совместится с точкой $Q$ (рис.21). Так как в этом случае $m = BM_1 : BA = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = -45^\circ$, то вектор $\overrightarrow{M_1Q}$ перемещения точки $M_1$ связан с вектором $\overrightarrow{AC}$ перемещения точки $A$ равенством

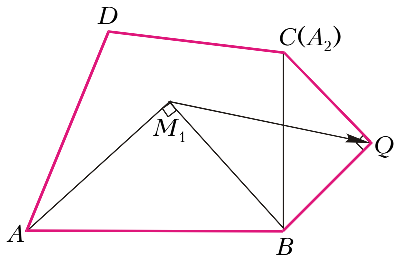



Рис. 21

$$(\Delta\vec{r}_M)_2 = \overrightarrow{M_1Q} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}^{-45^\circ}.$$

Окончательно имеем

$$\overrightarrow{MQ} = \Delta\vec{r}_M = (\Delta\vec{r}_M)_1 + (\Delta\vec{r}_M)_2 = \overrightarrow{MM_1} + \overrightarrow{M_1Q} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{DB}^{45^\circ} + \overrightarrow{AC}^{-45^\circ}\right). \quad (18)$$

Аналогично поступим с точкой $T$. Сначала, оставляя неподвижной точку $D$, совместим точку $C$ с точкой $A$. При этом точка $T$ займет положение $T_1$ (рис.22). И тогда будут выполнены равенства

$$(\Delta\vec{r}_T)_1 = \overrightarrow{TT_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{CA}^{45^\circ} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{AC}^{45^\circ}.$$

Затем, не меняя положения точки $A$, совместим точку $D$ с точкой $B$. Тогда точка $T_1$ совпадет с точкой $S$ (рис. 23). Так как в этом случае $m = AM : MD = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\alpha = -45^\circ$, то

$$(\Delta\vec{r}_T)_2 = \overrightarrow{T_1S} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{DB}^{-45^\circ}.$$

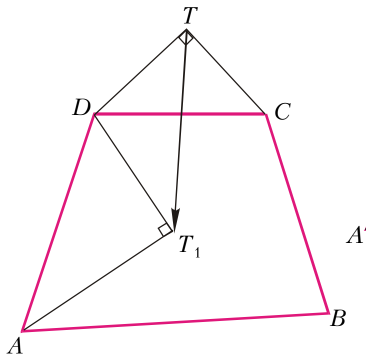



Рис. 22

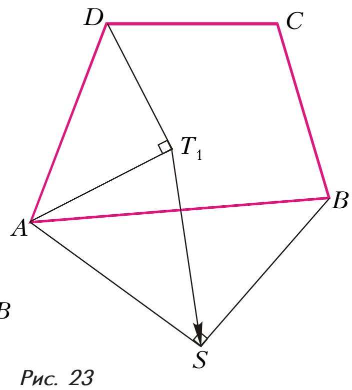



Рис. 23

Складывая перемещения $(\Delta\vec{r}_T)_1$ и $(\Delta\vec{r}_T)_2$, получим

$$\overrightarrow{TS} = \Delta\vec{r}_T = (\Delta\vec{r}_T)_1 + (\Delta\vec{r}_T)_2 = \overrightarrow{TT_1} + \overrightarrow{T_1S} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{AC}^{45^\circ} + \overrightarrow{DB}^{-45^\circ}\right).$$

Повернем теперь вектор $\overrightarrow{TS}$ на $90^\circ$:

$$\overrightarrow{TS}^{90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\overrightarrow{AC}^{135^\circ} + \overrightarrow{DB}^{45^\circ}\right).$$

Учитывая, что $-\overrightarrow{AC}^{135^\circ} = \left(-\overrightarrow{AC}^{180^\circ}\right)^{-45^\circ} = \overrightarrow{AC}^{45^\circ}$, получим

$$\overrightarrow{TS}^{90^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\overrightarrow{AC}^{-45^\circ} + \overrightarrow{DB}^{45^\circ}\right).$$

Сравнивая это выражение с (18), приходим к равенству $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{TS}^{90^\circ}$. Из него и следует то, что требовалось доказать.

**Упражнения**

**8.** Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены подобные прямоугольные треугольники $BMA$, $CTB$, $DQC$, $ASD$ с углами $\alpha$ при вершинах $A$, $C$ и с углами $\beta$ при вершинах $B$ и $D$. Докажите, что отрезки $MQ$ и $ST$ равны и угол между ними равен $2\alpha$ ($2\beta$).

**9.** Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники $AOB$, $BQC$, $CSD$, $DTA$. Докажите, что если вершины $O$ и $S$ совпадают, то совпадают вершины $Q$ и $T$.

**10.** Дан четырехугольник $ADCB$. На его сторонах как на гипотенузах построены прямоугольные равнобедренные треугольники $AOB$, $CQB$, $CSD$, $ATD$. Докажите, что если вершины $O$ и $S$ совпадают, то отрезок $QT$ проходит через их общую точку и делится в ней пополам.

**11.** В четырехугольнике $ABCD$ $AB = \sqrt{3}\,CD$ и при этом угол между прямыми $AB$ и $CD$ равен $30^\circ$. На стороне $AD$ построен равносторонний треугольник $ADL$, а на стороне $BC$ – равнобедренный треугольник $BKC$ с углом $120^\circ$ при вершине $C$. Докажите, что точки $L$, $D$, $K$ лежит на одной прямой и точка $D$ является серединой отрезка $KL$.

**12.** В трапеции $ABCD$, с основаниями $AB$ и $CD$, $AB = \sqrt{3}\,CD$. На ее боковых сторонах $AD$, $BC$ и диагоналях $AC$, $BD$ построены как на гипотенузах подобные прямоугольные треугольники $DLA$, $CNB$, $CMA$, $DKB$ с углами $30^\circ$ при вершинах $A$, $B$ и $60^\circ$ при вершинах $C$, $D$. Докажите, что четырехугольник $KNML$ – квадрат со стороной, вдвое меньшей основания $AB$. Найдите углы, которые образуют с основаниями трапеции стороны квадрата.