Чаша весов колеблется...

А.СТАСЕНКО

Вот, я знаю вас, владыки справедливости,.. я не творил дурного,.. я не прибавлял к мере веса, я не давил на гирю, я не плутовал с отвесом... Я чист. Я чист. Я чист.

Древнеегипетское заклинание
(из «Книги мертвых», гл. 125)

Тысячи лет нужды торговли заставляли человечество отмерять и взвешивать. Изобретено множество систем весов, представленных в современных музеях. Разработаны теории точного взвешивания, из которых в школьные программы вошла в основном *статика* весов. [1] В реальности весы работают в *динамическом режиме*, в чем можно убедиться в любом магазине. И это не случайно. А почему – об этом и пойдет речь.

«Сконструируем» самые простые весы (рис.1,*а*): пружина с направляющим штоком, на верхнем конце которого укреплена чашка для товара. Если масса чашки m, то пружина сразу укоротится на

$$x_0 = \frac{mg}{k},$$

где k – жесткость пружины. Это положение и является стартовым для взвешивания товара (рис.1,*б*). Поэтому введем понятие отклонения от положения равновесия:

$$s = x - x_0 .$$

Груз, даже спокойно положенный на чашку весов (без начальной скорости), начнет двигаться вниз и вызовет колебания, которые постепенно затухнут из-за сопротивления воздуха, трения твердых частей конструкции весов друг о друга, потерь энергии в деформируемой пружине... В результате, если подождать достаточно долго, то при отсутствии сухого трения истинное показание весов должно быть равно (рис.1,*в*)

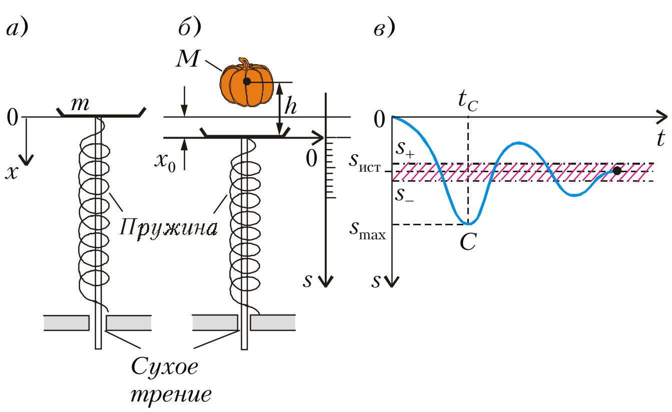

Рис. 1

$$s_{ист} = \frac{Mg}{k} \equiv \frac{G}{k} . \qquad (1)$$

(Заметим, что под термином «вес груза G» здесь мы понимаем показание весов.)

Но кто же будет ждать «достаточно долго»? И Продавцу некогда, и Очередь соберется и взволнуется не в пользу Покупателя.

В дальнейшем для упрощения теории предположим, что диссипация механической энергии (т.е. ее превращение в тепловую) связана только с сухим трением. В идеальном случае сила сухого трения не зависит от величины относительной скорости трущихся тел, а зависит только от направления движения, т.е. от знака скорости. Рисунок 2 иллюстрирует этот факт: знак силы трения противоположен знаку скорости, т.е. s', что вполне разумно – в противном случае трение ускоряло бы тела. В частности, в начале движения, когда чашка и груз идут вниз ($s' > 0$), сила трения направлена вверх (т.е. в наших координатах она отрицательна). В этих предположениях уравнение движения весов будет иметь вид

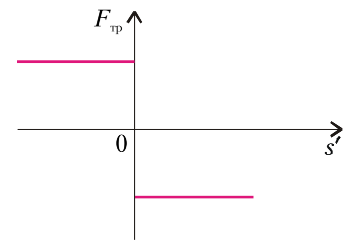

Рис. 2

$$(m + M)s'' = -ks + Mg \mp F_{тр} . \qquad (2)$$

(Обратим внимание, что на самом деле тут *два* уравнения, каждое из которых соответствует определенному знаку скорости $s' \gtrless 0$.) Это выражение можно привести к более привычному виду

$$s'' + \omega^2 s = \frac{Mg \mp F_{тр}}{m + M}, \qquad (3)$$

где

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + M}} \qquad (4)$$

– круговая частота собственных колебаний.

Но почему в уравнении (2) не учтен вес чашки mg? А потому, что оно записано для *отклонения* s от положения равновесия. Поясним подробнее. Вернемся к координате x (см. рис.1,*а*). В этом случае уравнение движения чашки с грузом имеет вид

$$(m + M)x'' = -kx + (m + M)g \mp F_{тр} .$$

Здесь вес чашки присутствует, что вполне понятно. Но, подставляя сюда $x = s + x_0$ и учитывая, что $x'' = s''$ (постоянная величина x_0 исчезает при дифференцировании по времени), получаем

$$(m + M)s'' = -ks - \underline{kx_0} + \underline{mg} + Mg \mp F_{тр} .$$

По определению величины x_0, подчеркнутые слагаемые взаимно уничтожаются, и получается уравнение (2).

Из уравнения (2) видно, что существуют два значения s,

(Окончание см. на с. 34)

[1] *О статике простейших рычажных равноплечих весов можно прочитать, например, в статье С.Варламова в «Кванте» №1 за 2003 год. (Прим. ред.)*

(Начало см. на с. 31)

при которых весы могут оставаться в покое ($s'' = 0$):

$$s_{\pm} = \frac{G \mp F_{\text{тр}}}{k} = s_{\text{ист}} \mp \frac{F_{\text{тр}}}{k}.$$

Значит, вокруг «истинного» показания весов существует полоса застоя шириной $\Delta s = 2F_{\text{тр}}/k$ (она заштрихована на рисунке 1,*в*), попав в которую с нулевой скоростью (т.е. с нулевой кинетической энергией), весы остаются в покое.

Ясно, что Продавцу наиболее выгодно снять груз в точке C, в которой весы показывают максимальный вес. Поэтому рассмотрим движение весов с самого начала. Пусть аккуратный Продавец кладет товар на чашку весов с нулевой начальной скоростью и отпускает его. Значит, в начальный момент времени $t = 0$ отклонение весов и скорость этого отклонения равны нулю:

$$s_0 = 0, \quad s_0' = 0.$$

Чашка весов с товаром начнет двигаться вниз ($s_0' > 0$, согласно нашему выбору оси координат), в уравнении (2) перед силой трения нужно взять знак «минус» (сила трения тормозит движение), так что решение уравнения (2) примет вид

$$s(t) = \frac{G - F_{\text{тр}}}{k}(1 - \cos\omega t). \qquad (5)$$

Но ведь это уравнение гармонических колебаний! А как же трение? Дело в том, что выражение (5) верно только до точки C, после прохождения которой изменяется знак скорости ($s' < 0$) и, следовательно, знак перед силой трения. Значит, «гармонические колебания» сначала будут происходить вокруг уровня $s = s_+$, а затем вокруг $s = s_-$ и т.д. Понятно, что наибольшее отклонение будет достигнуто при $\cos\omega t_C = -1$, т.е. в момент времени $t_C = \pi/\omega$, и это отклонение (наиболее выгодное для Продавца) будет равно

$$s_{\max} = 2\frac{G - F_{\text{тр}}}{k}. \qquad (6)$$

И это еще не все. Ведь можно *уронить* товар с высоты h (над чашкой весов, находящейся в положении равновесия; см. рис.1,*б*). Тогда, считая удар товара о чашку абсолютно неупругим, из закона сохранения импульса получим начальное значение скорости чашки с товаром:

$$(m + M)s_0' = M\sqrt{2gh}, \quad s_0' = \frac{\sqrt{2gh}}{1 + m/M}. \qquad (7)$$

Можно решить уравнение (2) с этими новыми начальными условиями (см. Приложение для желающих). Но для определения наибольшего отклонения $s_{\max}$ достаточно энергетических соображений. Ведь начальная кинетическая энергия чашки и товара $(m + M)s_0'^2/2$ идет прежде всего на сжатие пружины: потенциальная энергия пружины равна $ks_{\max}^2/2$ и на преодоление силы трения: ее работа равна $-F_{\text{тр}}s_{\max}$; кроме того, поле тяготения Земли совершает работу, равную $Gs_{\max}$. В результате получим уравнение

$$\frac{ks_{\max}^2}{2} = (G - F_{\text{тр}})s_{\max} + \frac{Gh}{1 + m/M}.$$

Последнее слагаемое справа – начальная кинетическая энергия чашки с грузом. Заметим, что она меньше начальной потенциальной энергии Gh груза над чашкой, поскольку часть этой энергии перешла в тепло при неупругом ударе. (А о том, почему сюда не вошла сила mg, мы уже говорили.) Решение этого квадратного уравнения тривиально:

$$s_{\max} = \frac{G - F_{\text{тр}}}{k}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2Ghk}{(G - F_{\text{тр}})^2(1 + m/M)}}\right)$$

(при $h = 0$ оно совпадает с выражением (6)).

Как же узнать истинный вес товара G (или его массу $M \equiv G/g$)? Ведь в последнем уравнении помимо G еще много неизвестных: масса чашки m, жесткость пружины k, сила трения $F_{\text{тр}}$ – четыре неизвестных! А что известно? Прежде всего, $s_{\max}$ (или ложный вес $G_{\max} = ks_{\max}$ – именно за него вас просят заплатить в кассу). Далее, вы можете непосредственно оценить высоту h, с которой роняется товар, и кроме того – засечь по секундной стрелке ваших часов момент

$$t_C = \frac{\pi}{\omega} = \pi\sqrt{\frac{m + M}{k}}.$$

Это уже кое-что, но этого недостаточно для определения перечисленных выше четырех неизвестных. Что же делать? Конечно, можно принести собственную выверенную гирю (известной массы) и самому поэкспериментировать с весами (ставя или роняя ее на чашку) – но это может задеть честь легко ранимого Продавца. Можно попросить его уронить тот же товар с высоты $h_1 > h$, $h_2 > h_1, \ldots$ – сколько нужно раз (подумайте сами, сколько именно раз), чтобы получить нужное число максимальных показаний весов и, следовательно, нужное число уравнений, а затем найти все неизвестные и среди них истинный вес G. Только, проведя вычисления, не забудьте взять сдачу!

Приложение для желающих

Приведем решение уравнения (2) для ненулевой начальной скорости движения чашки с товаром s_0' (см выражение (7)):

$$s(t) = A(1 - \cos\omega t) + B\sin\omega t,$$

где

$$A = \frac{G \mp F_{\text{тр}}}{k}, \quad B = \frac{s_0'}{\omega}.$$

Это решение легко запрограммировать на компьютере, только надо не забывать переключать знак перед $F_{\text{тр}}$ в выражении для A каждый раз, когда достигается нулевое значение скорости (т.е. когда касательная к кривой $s(t)$ становится горизонтальной). Например, первый раз это случится в момент времени, определяемый условием

$$\omega t = \pi - \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{2Ghk/(1 + m/M)}}{G - F_{\text{тр}}}\right).$$

Вычисления следует продолжать до тех пор, пока система не окажется впервые с нулевой скоростью в полосе застоя.

Полезно также уговорить компьютер нарисовать картины для различных значений параметров задачи (k, $G \equiv Mg$, h, m/M).

Желаем успехов!