Глава I

МЕХАНИКА ТОЧКИ

§ 1. АКСИОМЫ НЬЮТОНА

Мы приведем законы движения в аксиоматической форме, рассматривая их как обобщение и уточнение всей совокупности опытных фактов.

Аксиома первая. *Каждое тело пребывает в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока действующие на него силы не заставят его изменить это состояние.*

Не останавливаясь пока на разъяснении употребленного выше понятия силы, отметим, что этой аксиомой утверждается равноправие *состояний покоя и равномерного прямолинейного движения*, которые рассматриваются как естественные состояния тела. Закон постулирует способность тел пребывать в этих естественных состояниях. Эту способность называют также *инертностью* или *инерцией тела*. Первую аксиому Ньютона называют иногда «законом инерции Галилея». При этом нужно заметить, что хотя Галилей и пришел к этому закону раньше Ньютона, но сформулировал его только как следствие из проведенных им опытов по падению тел по наклонной плоскости для предельного случая исчезающего наклона (т. е. горизонтальной плоскости), тогда как Ньютон поставил этот закон во главу всей своей системы. Вместо ньютоновского термина «тело» мы в дальнейшем будем пользоваться термином «точечное тело» или «материальная точка».

Чтобы дать закону математическую формулировку, воспользуемся теми определениями 1 и 2, которые у Ньютона предшествуют этому закону. Определение 2 гласит:

Количество движения есть мера такового, устанавливаемая пропорционально скорости и количеству материи.

Таким образом, «количество движения» является произведением двух сомножителей: скорости, являющейся геометрически наглядной величиной[1], и «количества материи», которое является понятием, требующим физического определения. Ньютон пытался дать его в своем определении 1, в котором он говорит: «Количество материи есть мера таковой, устанавливаемая пропорционально плотности и объему ее». Это определение, очевидно, является бессодержательным, так как плотность в свою очередь может быть определена только как количество материи в единице объема. В этом же определении Ньютон указывает, что в дальнейшем он будет употреблять термин «масса» вместо термина «количество материи». Мы также будем пользоваться этим термином, но одновременно заметим, что мы должны будем вернуться к физическому определению массы (как и к физическому определению силы).

В дальнейшем под количеством движения мы будем понимать произведение массы на скорость. Оно, так же как и скорость, является направленной величиной — «вектором». Обозначая количество движения через $\mathbf{G}$,[2] массу через m, скорость через $\mathbf{v}$, мы можем написать:

$$\mathbf{G} = m\mathbf{v} \tag{1.1}$$

и окончательно сформулировать первый закон движения следующим образом:

$$\mathbf{G} = \mathrm{const} \quad \text{«при отсутствии сил».} \tag{1.2}$$

Уточненный таким образом закон инерции, который мы ставим во главу угла нашей механики, является в действительности плодом многовекового развития науки. Насколько этот закон не тривиален, видно из следующего факта. В своем сочинении «Об истинном определении живых сил» в 1747 г., т. е. много позже Ньютона, молодой Кант говорит: «Существуют движения двоякого рода: такие, которые прекращаются после определенного времени, и такие, которые продолжаются». Движения, которые, по мнению Канта, прекращаются сами по себе, являются по нашим теперешним (и по ньютоновским) воззрениям такими движениями, которые замедляются силами трения и в конце концов прекращаются.

---

[1] Поскольку фиксирована система отсчета, в которой должна измеряться скорость (ср. § 2).

[2] Мы предполагаем, что читатель знаком с элементами векторного исчисления. Но так как возникновение векторного исчисления теснейшим образом связано с механикой (включая механику жидкостей), то одновременно с механическими понятиями мы будем объяснять и векторные понятия.

Для обозначения векторов мы будем пользоваться, где это удобно, прямым жирным шрифтом. Наравне с этим мы будем пользоваться также и обозначениями стрелкой, например, бесконечно малый поворот будем обозначать через $\overrightarrow{\delta\varphi}$ в тех случаях, когда он рассматривается как (аксиальный) вектор.

Термин «количество движения» неудачен, так как он не учитывает векторного характера этой величины. Такой величине лучше соответствует термин «импульс», все больше и больше входящий в употребление в последние десятилетия. В его основе лежит представление, что произведение $m\mathbf{v}$ по направлению и величине означает тот «толчок» который может перевести тело из состояния покоя в данное состояние движения. Поэтому мы будем, как правило (в последних главах этой книги даже исключительно), употреблять вместо термина «количество движения» термин «импульс», сохраняя для него обозначение $\mathbf{G}$. В соответствии с этим, мы можем вместо «закон инерции» или «первый закон движения Ньютона» говорить «закон сохранения импульса».

Переходим ко второй аксиоме, которая, в сущности, является законом движения Ньютона:

Аксиома вторая. *Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Под «изменением движения», без сомнения, понимается изменение определенного выше количества движения $\mathbf{G}$, т. е. величина $\dot{\mathbf{G}}$ (точка сверху является ньютоновским обозначением «флюкции» $\dot{\mathbf{G}} = \frac{d\mathbf{G}}{dt}$). Если силу обозначить через $\mathbf{F}$ (от латинского слова fors), то второй закон можно записать в виде:

$$\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}. \tag{1.3}$$

Так как $\mathbf{G}$ — импульс, то это уравнение выражает закон изменения импульса или просто *закон импульса.*

К сожалению, вместо этого наименования обычно употребляется, особенно в математической литературе, наименование: *закон ускорения Ньютона.* Конечно, если m считать постоянной, то (1.3) и (1.1) эквивалентны уравнению

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}: \quad \text{«масса} \times \text{ускорение} = \text{силе».} \tag{1.3a}$$

Но масса не всегда постоянна; например, она не постоянна в теории относительности, в которой ньютоновская формулировка закона [уравнение (1.3)] оправдалась прямо-таки пророчески. В § 4 мы рассмотрим ряд примеров движения с изменяющейся массой, причем подробно разберем соотношения между формулировками (1.3) и (1.3a). Однако уже уравнение движения вращающегося твердого тела, являющегося простейшей механической системой после материальной точки, должно быть сформулировано в смысле уравнения (1.3): «изменение момента импульса равно моменту силы»; попытка же сформулировать этот закон с помощью понятия углового ускорения в смысле уравнения (1.3а) ни к чему не привела бы. Причина этого, как и в теории относительности, заключается в том, что момент инерции, играющий при вращении роль массы, может изменяться при изменении положения оси вращения в теле.

Попытаемся внести ясность в столь часто дискутировавшееся понятие силы. Кирхгоф[1] хотел низвести это понятие в ранг простого определения, согласно которому сила есть произведение массы на ускорение. Также и Герц[2] в своем посмертном труде стремился исключить понятие силы и заменить его связью между рассматриваемой системой и другими, вообще говоря, скрытыми, системами, находящимися с ней во взаимодействии. Герц провел эту программу с мастерской последовательностью. Но его метод едва ли дал плодотворные результаты; в частности, для начинающих он совершенно не пригоден.

Мы полагаем, что наши мускульные ощущения дают нам непосредственное, по крайней мере *качественное*, представление о понятии силы. Сверх того, всюду на Земле в нашем распоряжении имеется в качестве мерила сила тяжести, при помощи которой мы можем *количественно* измерять все другие силы. Для этого нужно только уравновесить действие данной силы соответствующим весом (при помощи ролика и нитки мы можем перевести вертикальное направление силы тяжести в направление, противоположное направлению данной силы). Изготовив, сверх того, определенное количество одинаковых тел — «набор разновесов», — мы можем использовать их в качестве временной шкалы для количественного измерения сил.

О понятии силы мы можем сказать то же самое, что и о всех физических понятиях и наименованиях: словесные определения бессодержательны, истинные же определения даются указанием способа измерения, которое, вообще говоря, может быть осуществимо только теоретически и не обязательно практически.

После того как мы таким путем придали правой части нашего закона импульса (1.3) конкретный смысл, этот закон стал действительно

---

[1] Gustav Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Bd. I, S. 22.

[2] Heinrich Hertz, Gesammelte Werke, Bd. III. — Principien der Mechanik.

физическим утверждением. Однако в его левую часть входит еще масса m, которой до сих пор не было дано определения. Не надо думать, что определение массы m является единственным содержанием закона импульса. Напротив, этим законом подчеркивается, что силой определяется именно $\dot{\mathbf{G}}$, а не сам импульс $\mathbf{G}$ или $\ddot{\mathbf{G}}$. В § 4 на примере релятивистской массы мы увидим, как нужно определить понятие массы в случае ее непостоянства.

Аксиома третья. *Действие всегда равно противодействию, или иначе — действия двух тел друг на друга всегда равны и противоположно направлены.*

Для каждого давления существует противодавление. В природе силы встречаются всегда попарно. Падающий камень притягивает Землю точно с такой же силой, как и Земля притягивает камень. Этот закон делает возможным переход от механики отдельной материальной точки к механике сложных систем; в частности, он лежит в основе всей статики строительных сооружений.

В качестве *аксиомы четвертой*, которая, впрочем, у Ньютона встречается только как добавление к законам движения (как королларий), мы будем рассматривать *правило параллелограмма сил.* Согласно этой аксиоме, две силы, приложенные к одной и той же точке, складываются по направлению диагонали образованного ими параллелограмма. *Силы складываются векторно.*

Это становится само собою понятным после того, как во втором законе мы отождествили силу $\mathbf{F}$ с вектором $\dot{\mathbf{G}}$. В этом законе, как подчеркивает Мах, действительно заключается аксиома, что каждая сила производит соответствующее ей изменение движения материальной точки, *независимо* от того, действуют ли на эту точку одновременно и другие силы. Таким образом, эта *независимость действия сил друг от друга*, или, если сформулировать в более общем смысле, *принцип суперпозиции действия сил*, аксиоматически устанавливается законом параллелограмма сил. Конечно, этот закон, как и предшествующие законы движения, является идеализацией и обобщением всего опытного материала.

Введем уже здесь, наряду с понятием силы, понятие работы с помощью определения:

$$dA = (\mathbf{F}d\mathbf{s}) = F \cdot ds \cdot \cos(\mathbf{F},\, d\mathbf{s}). \qquad (1.4)$$

Следовательно, работа есть не «сила × путь», как часто говорят, а «слагающая силы × путь» или «сила × слагающую пути».

Тогда из закона: «Силы складываются векторно» непосредственно вытекает дополняющая его теорема: «Работы складываются алгебраически». Действительно, из уравнения

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots = \mathbf{F}$$

($\mathbf{F}$ = равнодействующей силе) после умножения его скалярно на путь $d\mathbf{s}$ следует:

$$(\mathbf{F}_1 d\mathbf{s}) + (\mathbf{F}_2 d\mathbf{s}) + \ldots = (\mathbf{F} d\mathbf{s}). \tag{1.5}$$

Поскольку мы определили скалярное умножение с помощью формулы (1.4), само собою разумеется, что, например, и первое произведение входит только слагающая пути $d\mathbf{s}$, пройденная в направлении силы $\mathbf{F}_1$. Итак, вместо (1.5) можно также писать

$$dA_1 + dA_2 + \ldots = dA, \tag{1.6}$$

что и требовалось доказать.

С понятием работы связано понятие мощности: *мощность есть работа за единицу времени.*

Чтобы покончить с этими вводными пояснениями, договоримся относительно точного *измерения* механических величин. Существуют две соперничающие системы единиц измерения этих величин: *физическая* и *техническая.* Различие между ними заключается в том, что в физической системе единиц *г* (или *кг*) служит единицей *массы*, тогда как в технической системе *кг* (или *г*) означает единицу *силы.* В последнем случае мы говорим о *кг-весе*, причем

$$1 \text{ \textit{кг-вес}} = g \cdot \text{\textit{кг-масса}},$$

где g — ускорение силы тяжести. Но так как это ускорение зависит от местоположения на земном шаре (на полюсе оно больше, чем на экваторе, из-за меньшего расстояния от центра Земли и меньшего центробежного действия), то значение *кг-вес* зависит от места. Поэтому техническая система единиц не пригодна для точных измерений; напротив, физическая система получила почетное название «абсолютной системы единиц измерения». Насколько глубоко укоренилась техническая система единиц в нашем научном языке, видно из того факта, что во многих случаях, когда надо было бы употребить термин «масса», говорят «вес». Мы говорим об *удельном весе* в тех случаях, когда следовало бы говорить об *удельной массе* или *плотности*; мы говорим об атомных и молекулярных весах, которые, конечно, не имеют никакого отношения к земному тяготению.

Гаусс, родоначальник абсолютных измерений, остановился после некоторых колебаний на «физической» системе единиц. Вначале он был склонен ввести силу в качестве основной единицы, так как в его измерениях земного магнетизма она играла более непосредственную роль, чем масса. Но так как, с другой стороны, магнитные измерения должны были охватить весь земной шар, то он был вынужден принять единицу, не зависящую от места.

Сравним обе системы друг с другом и введем при этом производные единицы: *дину, эрг, джоуль, ватт, лошадиную силу.*

Физическая система единиц (CGS)	*Техническая система единиц*
см, г-масса, сек.	*м, кг-вес, сек.*
$1\ \textit{кг-вес} = 9{,}81\cdot 10^5\,\frac{\textit{г}\cdot\textit{см}}{\textit{сек}^2} = 9{,}81\cdot 10^5\ \textit{дин}$	$1\ \textit{г-масса} = \frac{1\ \textit{кг}\cdot 1\ \textit{сек}^2}{1000g\cdot\textit{м}}$
$1\ \textit{эрг} = 1\ \textit{дина}\cdot 1\ \textit{см}$	Единица работы $= 1\ \textit{кг}\cdot 1\ \textit{м}$
$1\ \textit{джоуль} = 10^7\ \textit{эрг}$	
$1\ \textit{м}\cdot\textit{кг-вес} = 1000\cdot g\cdot 100\ \textit{эрг} = 9{,}81\cdot 10^7\,\textit{эрг} = 9{,}81\,\textit{джоуля}$	
$1\ \textit{ватт} = 1\ \textit{джоуль}\cdot\textit{сек}^{-1}$	Единица мощности $= 1\ \textit{кг}\cdot 1\ \textit{м}\cdot\textit{сек}^{-1}$
$1\,\textit{киловатт} = 1000\ \textit{джоулей}\cdot\textit{сек}^{-1} = \frac{1\ \textit{лош. сила}}{0{,}736} = 1{,}36\ \textit{лош. силы.}$	$1\ \textit{лош. сила} = 75\,\frac{\textit{кг}\cdot\textit{м}}{\textit{сек}} = 75\cdot 1000\cdot 100\times 981\,\frac{\textit{эрг}}{\textit{сек.}} = 75\cdot 9{,}81\ \textit{ватта} = 0{,}736\ \textit{киловатта.}$

Здесь уместно заметить, что, согласно решению соответствующих международных комиссий, система CGS должна, начиная с 1940 г., быть заменена системой MKS; вместо *см* вводится *м*, вместо *г* вводится *кг* в качестве единицы массы, а единицей времени остается *сек.*

Это соответствует предложению, сделанному Джорджи, основное содержание которого, впрочем, заключается во введении четвертой независимой электрической единицы измерения. В механике предложенное изменение имеет то преимущество, что в определении *джоуля* и *ватта* отпадают докучливые множители (степени десяти). В новых больших единицах M и K единицей работы и мощности становится

$$1\mathrm{M}^2\mathrm{KS}^{-2} = 10^7 \ \textit{см}^2 \cdot \textit{г} \cdot \textit{сек}^{-2} = 1 \ \textit{джоуль},$$
$$1\mathrm{M}^2\mathrm{KS}^{-3} = 10^7 \ \textit{см}^2 \cdot \textit{г} \cdot \textit{сек}^{-3} = 1 \ \textit{ватт}.$$

Следовательно, в новой системе единицей силы, которую мы назовем «*Дина*» (с большой буквы), будет:

$$1 \ \textit{Дина} = 1\mathrm{MKS}^{-2} = 10^5 \ \textit{см} \cdot \textit{г} \cdot \textit{сек}^{-2} = 10^5 \ \textit{дин}.$$

Одним из преимуществ системы Джорджи является сближение новой единицы силы с удобной технической единицей силы *кг-весом*, тогда как прежняя единица силы «*дина*» по своей малости неудобна для практического употребления.

§ 2. ПРОСТРАНСТВО, ВРЕМЯ И СИСТЕМА ОТСЧЕТА[1]

В настоящее время воззрения Ньютона относительно пространства и времени кажутся нам очень схоластичными и стоящими в противоречии с его повторными утверждениями, что он хочет опираться только на факты. Ньютон говорит:

«*Абсолютное пространство* по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

«*Абсолютное, истинное математическое время* само по себе и по самой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно и иначе называется длительностью».

Судя по этому, кажется, что Ньютона нисколько не заботил вопрос о том, откуда он берет свое абсолютное время и как он может отличить

[1]Начинающий читатель, которому эти несколько абстрактные рассуждения могут показаться трудными, может отложить на некоторое время изучение этого параграфа и некоторых частей § 4.

свое «*неподвижное*» абсолютное пространство от пространства, равномерно движущегося по отношению к «*неподвижному*». Это тем более удивительно, что в своей первой аксиоме Ньютон считает «состояние покоя» и «равномерное движение» равноправными. С другой стороны, Ньютон пытается выявить различие между абсолютным и относительным движением с помощью своего знаменитого «опыта с ведром»: вода наливается в ведро, которое висит на закрученной веревке и внезапно приводится этой веревкой во вращение вокруг своей оси. Вначале поверхность воды остается плоской, несмотря на то, что относительная скорость ведра и воды велика. Только по мере того, как вследствие трения вода приводится в движение, она поднимается у стенок вверх, и ее поверхность принимает параболоидальную форму. Относительное движение между ведром и водой теперь прекратилось, но возникло «абсолютное» движение воды в пространстве, а вместе с ним образовалась и вогнутость поверхности воды.

На самом деле этот опыт показывает только, что вращающееся ведро является неподходящей системой отсчета для того, чтобы понять движение воды[1]. Является ли Земля такой системой отсчета? Она также вращается и вдобавок движется еще и вокруг Солнца. Какие вообще требования надо предъявлять к *идеальной системе отсчета механики*? Под системой отсчета мы понимаем пространственно-временную систему, с помощью которой можно определять положение материальных точек и течение времени, как, например, прямоугольную систему координат x, y, z и шкалу времени t.

На практике мы полагаемся в этих вопросах на астрономов, которые дают нам в системе неподвижных звезд достаточно неподвижные оси и в средних солнечных сутках достаточно постоянную единицу времени. Но с теоретической точки зрения мы, к сожалению, приходим к тавтологии: правильной является та система отсчета, в которой закон инерции Галилея оказывается в достаточной степени справедливым для достаточно свободного тела. Таким образом, закон инерции низводится к чисто формальному определению; в качестве положительного неформального содержания закона остается только следующее утверждение:

[1]Имеется в виду: «понять на основе ньютоновых законов механики». Если бы закон инерции был справедлив, когда в качестве системы отсчета взято «вращающееся» ведро, то поверхность воды в нем была бы плоской. Поскольку опыт дает иной результат, мы должны сделать заключение, что в системе отсчета, связанной с вращающимся ведром, закон инерции не имеет места. (*Прим. ред.*)

существуют системы отсчета, обладающие требуемым свойством. Согласно всему нашему опыту, такая система приближенно задается астрономическими определениями места и времени.

В сущности, именно это имеют в виду, когда в основу механики кладут понятие *инерциальной системы,* т. е. воображаемой системы, образованной траекториями тел, движущихся по инерции[1].

Теперь возникает вопрос: в какой мере определена эта идеальная система? Является ли такая система x, y, z, t *единственной* или существует *бесконечное множество* таких систем? Из закона инерции, который не делает различия между состоянием покоя и состоянием равномерного движения, непосредственно следует, что системе x, y, z, t равноправна любая система x', y', z', t', отличающаяся от нее только равномерным поступательным движением. Математически это выражается следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + \alpha_0 t, \\ y' &= y + \beta_0 t, \\ z' &= z + \gamma_0 t, \\ t' &= t. \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

Преобразование (2.1) можно обобщить на случай поворота системы пространственных координат x, y, z. Это сводится к замене x, y, z в формулах (2.1) новыми пространственными координатами ξ, η, ζ, удовлетворяющими условию.

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = x^2 + y^2 + z^2. \tag{2.2}$$

Это условие определяет произвольное *ортогональное преобразование*, которое можно охарактеризовать направляющими косинусами согласно следующей схеме:

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline \xi & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \eta & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \zeta & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{array} \tag{2.3}$$

[1] В оригинале соответствующая фраза гласит: «Im Grunde dasselbe meint man, wenn man der Mechanik ein *Inertial-System* zugrunde legt, d. h. ein von Trägheitsbahnen gebildetes Gedankending». Эта фраза представляет затруднения для понимания, а следовательно, и для перевода. Всякая система отсчета образуется не траекториями, а *телами.* В соответствии с этим, и определение инерциальной системы должно сводиться к указанию тела, служащего в качестве тела отсчета. (*Прим. ред.*)

Эту схему можно читать как слева направо, так и сверху вниз. При этом, ввиду (2.2), α, β, γ удовлетворяют известным условиям

$$\sum \alpha_k^2 = \sum \beta_k^2 = \sum \gamma_k^2 = 1, \quad \sum \alpha_k \beta_k = \ldots = 0 \quad \text{и т. д.} \tag{2.4}$$

Заменив в правой части (2.1) x, y, z через ξ, η, ζ и воспользовавшись (2.3), получим обобщенную схему преобразования:

$$\begin{array}{c|cccc} & x & y & z & t \\ \hline x' & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_0 \\ y' & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_0 \\ z' & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_0 \\ t' & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \tag{2.5}$$

Тот факт, что штрихованная система x', y', z', t' столь же пригодна в качестве системы отсчета классической механики, как и нештрихованная система x, y, z, t, называется *принципом относительности классической механики.* В дальнейшем преобразование (2.5) мы будем называть преобразованием Галилея. Оно линейно относительно четырех координат, ортогонально относительно первых трех координат и оставляет координату времени инвариантной ($t' = t$). Последнее означает, что принцип относительности классической механики оставляет незатронутым абсолютный характер времени, постулированный Ньютоном.

Не так, однако, обстоит дело в области электродинамики и, в частности, в одном из ее отделов — в оптике. Уравнения Максвелла, которые управляют областью электродинамики, показывают, что процесс распространения света в вакууме со скоростью c не зависит от системы отсчета. Фронт шаровой волны, выходящей из начала координат, определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2 \quad \text{или} \quad x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2 t'^2, \tag{2.6}$$

в зависимости от того, пользуемся ли мы штрихованной или нештрихованной системой отсчета. Здесь удобно изменить обозначение координат следующим образом:

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad z = x_3, \quad ict = x_4, \tag{2.7}$$

понимая под i мнимую единицу; соответственные обозначения вводим и для штрихованных координат. Тогда уравнения (2.6) принимают следующий вид:

$$\sum_1^4 x_k^2 = 0, \quad \sum_1^4 {x'}_k^2 = 0. \tag{2.8}$$

Независимость распространения света от системы отсчета требует[1], чтобы

$$\sum_1^4 {x'}_k^2 = \sum_1^4 x_k^2. \tag{2.9}$$

Уравнение (2.2) определяло ортогональное преобразование в трехмерном пространстве, тогда как уравнение (2.9) относится к ортогональному преобразованию в *четырехмерном* пространстве, причем мнимость четвертой координаты не нарушает справедливости уравнений, аналогичных уравнениям (2.3), (2.4), (2.5). Соответствующее преобразованию (2.5) соотношение между x_k и x'_k называется *преобразованием Лоренца* (по имени великого голландского физика-теоретика Гендрика Антона Лоренца). Записываем это преобразование в виде следующей общей схемы:

$$\begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ \hline x'_1 & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ x'_2 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ x'_3 & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ x'_4 & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{array} \tag{2.10}$$

Эта схема указывает на то, что при изменении системы отсчета изменяются не только пространственные координаты, но и координаты времени (в мнимой форме x_4). Таким образом, требование инвариантности (2.9) с необходимостью ведет к отказу от абсолютности времени.

Значительно нагляднее общего преобразования частное преобразование Лоренца, которое мы получим, если оставим без изменения две пространственные координаты, например, x_1 и x_2, и преобразуем только x_3 и x_4.

[1] А именно, одно из уравнений (2.8) должно быть следствием другого. Ввиду линейности связи между штрихованными и нештрихованными координатами, это означает, что одно из выражений (2.8) должно быть пропорционально другому; коэффициент пропорциональности должен равняться 1 ввиду взаимности соотношений.

Тогда в первом и втором горизонтальных и вертикальных рядах схемы (2.10) должны исчезнуть все α, кроме

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = 1.$$

Это следует из равенств $x_1' = x_1$, $x_2' = x_2$, которые можно прочитать в схеме (2.10) как слева направо, так и сверху вниз. Далее, из условий, аналогичных условиям (2.4), получаем

$$\alpha_{33}^2 + \alpha_{34}^2 = \alpha_{33}^2 + \alpha_{43}^2 = \alpha_{43}^2 + \alpha_{44}^2 = \alpha_{34}^2 + \alpha_{44}^2 = 1; \tag{2.11}$$

таким образом,

$$\alpha_{33}^2 = \alpha_{44}^2, \quad \alpha_{34}^2 = \alpha_{43}^2.$$

Если мы положим здесь

$$\alpha_{33} = +\alpha_{44},$$

то должны выбрать

$$\alpha_{34} = -\alpha_{43},$$

чтобы удовлетворить условию ортогональности

$$\alpha_{33}\alpha_{34} + \alpha_{43}\alpha_{44} = 0.$$

Если еще ради сокращения ввести обозначения α и β, положив

$$\alpha_{33} = \alpha_{44} = \alpha, \quad \alpha_{34} = -\alpha_{43} = i\alpha\beta, \tag{2.12}$$

то схема (2.10) перейдет в

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1'	1	0	0	0
x_2'	0	1	0	0
x_3'	0	0	α	$i\alpha\beta$
x_4'	0	0	$-i\alpha\beta$	α

Отсюда получаем следующие соотношения между двумя последними координатами (отныне мы будем применять для них первоначальные обозначения z и t):

$$\left.\begin{aligned} z' &= \alpha(z - \beta ct), \\ t' &= \alpha(t - \frac{\beta}{c} z). \end{aligned}\right\} \tag{2.13}$$

Из уравнений (2.11) и (2.12) следует, что

$$\alpha^2(1-\beta^2) = 1, \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.13а}$$

Далее мы положим

$$\beta c = v, \quad \beta = \frac{v}{c}. \tag{2.13б}$$

Согласно первому из уравнений (2.13), введенная нами величина v означает скорость, с которой ось z' движется по отношению к нештрихованной системе[1]. Скорость эта параллельна оси z и направлена вдоль положительного направления этой оси. Подстановка (2.13а, б) в (2.13) окончательно дает двухмерное преобразование Лоренца:

$$\left.\begin{aligned} z' &= \frac{z - vt}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

Отсюда в пределе при $c \to \infty$ получается преобразование Галилея (2.1) с $\alpha_0 = \beta_0 = 0$, $\gamma_0 = -v$, а именно

$$z' = z - vt, \quad t' = t. \tag{2.14а}$$

Относительность времени в (2.14) и изменение масштаба пространственной координаты z (выражаемое знаменателем $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$) обусловлены, как мы видим, конечностью скорости света c, с которой несовместим принцип относительности классической механики.

---

[1] Действительно, если некоторая точка покоится относительно штрихованной системы координат, то ее координаты x', y', z' остаются постоянными. Значит, на основании первого из уравнений (2.13), координата z этой точки должна удовлетворять уравнению

$$\alpha(z - \beta ct) = \mathrm{const}.$$

или

$$z = vt + \mathrm{const}.$$

Отсюда следует, что рассматриваемая точка, а следовательно, и штрихованная система координат, движется равномерно вдоль оси z со скоростью v относительно нештрихованной системы. (*Прим. ред.*)

Тот факт, что при конечной скорости распространения c всех электродинамических воздействий преобразования Галилея должны быть заменены преобразованиями Лоренца [в общей их форме (2.10) или в специализированной форме (2.14)], называют *принципом относительности электродинамики.* Однако ясно, что и механика должна быть приведена в согласие с фактом конечности скорости распространения света. Только вследствие того, что все скорости, встречающиеся в обычной механике, очень малы по сравнению с c, для целей механики можно почти всегда не принимать во внимание изменение масштаба пространственных и временных координат, предписываемое уравнениями (2.14).

Все многообразие физических следствий, вытекающих из преобразований Лоренца, может быть рассмотрено лишь в электродинамике. Здесь же мы еще рассмотрим только те изменения в понимании одной из важнейших механических величин — *количества движения или импульса* $\mathbf{G}$, которые вытекают из принципа относительности.

Мы назвали $\mathbf{G}$ вектором. Под этим понимается только то, что при изменении координатной системы три составляющих $\mathbf{G}$ изменяются так же, как и сами координаты (т. е. как слагающие радиуса-вектора $\mathbf{r} = x,\ y,\ z$). Это утверждение выражают словами: $\mathbf{G}$ *ковариантно* с $\mathbf{r}$.

Однако это утверждение справедливо только с точки зрения преобразования Галилея, т. е. при условии, что время рассматривается как абсолютное. С точки зрения преобразований Лоренца *радиус-вектор* является *четырехкомпонентной* величиной, а именно *четырехмерным вектором*:

$$\mathfrak{r} = x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4. \tag{2.15}$$

Также и импульс — в дальнейшем мы будем обозначать его через $\mathfrak{G}$ — надо рассматривать как четырехмерный вектор; иными словами, чтобы иметь «права гражданства» в теории относительности, он должен быть ковариантным с $\mathfrak{r}$. Мы приходим к этому четырехмерному вектору следующим путем:

а) Координатное расстояние между двумя соседними точками

$$d\mathfrak{r} = dx_1,\ dx_2,\ dx_3,\ ic\,dt \tag{2.16}$$

так же, как и радиус-вектор (2.15), несомненно, является четырехмерным вектором.

б) Величина этого расстояния, конечно, *инвариантна* по отношению к преобразованиям Лоренца. С точностью до множителя ic, эта величина дается следующей формулой:

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2)}. \tag{2.17}$$

По введенной Минковским терминологии $d\tau$ называется элементом *собственного времени*; $d\tau$, в отличие от dt, релятивистски инвариантно. Если мы в (2.17) вынесем dt за скобки и введем обыкновенную трехмерную скорость v, то получим:

$$d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = dt\sqrt{1-\beta^2}. \tag{2.17a}$$

[Ср. (2.13)].

в) Путем деления четырехмерного вектора (2.16) на инвариант (2.17а) мы, конечно, получим опять четырехмерный вектор; назовем его *четырехмерным вектором скорости*:.

$$\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic\right). \tag{2.18}$$

г) Подобно тому, как мы получили прежний вектор импульса **G** из трехмерного вектора скорости путем умножения этого последнего на массу m, не зависящую от системы отсчета, мы получим четырехмерный вектор импульса $\mathfrak{G}$ из четырехмерного вектора скорости (2.18) путем умножения этого последнего на не зависящий от системы отсчета коэффициент. Назовем этот коэффициент м а с с о й п о к о я m_0. Тогда получим:

$$\mathfrak{G} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, ic\right). \tag{2.19}$$

Выражение, стоящее перед скобками, целесообразно назвать *массой движения* (так как оно для $\beta = 0$ переходит в массу покоя) или просто *массой*. Следовательно, мы утверждаем, что

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.20}$$

Этот закон впервые был выведен Лоренцом в 1904 г. при весьма специальных предположениях (деформируемый электрон); вышеприведенный вывод из принципа относительности делает подобные специальные предположения излишними. Справедливость уравнения (2.20) подтверждена многочисленными точными опытами с быстрыми электронами; вместе с оптическими опытами, особенно с опытом Майкельсона, они являются тем фундаментом, на котором покоится теория относительности. Если мы в нашем изложении, следуя в обратной последовательности и исходя из принципа относительности, пришли к уравнению (2.20) очень формальным путем, то логически это допустимо и способствует краткости наших вводных пояснений. В § 4 мы рассмотрим, какие изменения в применениях законов движения Ньютона вытекают из зависимости массы от скорости.

Теперь, чтобы довести до конца рассмотрение вопроса о допустимых системах отсчета, хотя бы в виде кратких указаний, мы перейдем от *специальной теории относительности*, которую мы рассматривали до сих пор, к *общей теории относительности* (Эйнштейн, 1915 г.). В специальной теории относительности имеются правомерные системы отсчета, преобразующиеся друг в друга путем преобразований Лоренца, и неправомерные системы отсчета, например, системы, движущиеся ускоренно относительно правомерных. В общей же теории относительности допускаются всевозможные системы отсчета; преобразования между ними не должны, подобно (2.10), быть линейными или ортогональными, а могут быть заданы произвольными функциями $x'_k = f_k(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Таким образом, речь идет о системах отсчета, произвольно движущихся и произвольно деформированных по отношению друг к другу. При этом пространство и время утрачивают последние черты той абсолютности, которой они обладали в основоположениях Ньютона. При подобных рассмотрениях даже евклидова геометрия оказывается недостаточной для этой цели и должна быть заменена значительно более общей геометрией, основание которой было заложено Риманом. При этом возникает задача придать физическим законам такую форму, которая делала бы их справедливыми для всех рассматриваемых систем отсчета, другими словами, придать им форму, инвариантную по отношению к любым «точечным преобразованиям» $x'_k = f_k(x_1, \ldots, x_4)$ четырехмерного пространства. В разрешении этой задачи и заключается положительное содержание общей теории относительности. Очень сложная в математическом отношении форма, которую при этом принимают законы механики, не может быть нами рассмотрена в этих лекциях. Упомянем только, что этот путь автоматически приводит к обоснованию и вместе с тем к уточнению ньютоновского закона тяготения.

В заключение скажем несколько слов о термине «теория относительности». Заслугой этой теории является не полная релятивизация пространства и времени, а доказательство независимости законов природы от выбора системы отсчета, т. е. доказательство инвариантности явлений природы по отношению ко всякому изменению точки зрения наблюдателя. Поэтому термин «теория инвариантности явлений природы» удачнее характеризовал бы эту теорию, чем обычный термин «общая теория относительности».

§ 3. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Допустим, что движение происходит по оси x. При таком движении проявляется действие только слагающих сил в направлении оси x, сумму которых мы обозначим через X.

В рассматриваемом случае $v = v_x = \frac{dx}{dt}$ и $G = G_x = m\frac{dx}{dt}$. Закон движения гласит:

$$\dot{G} = X, \tag{3.1}$$

а при постоянном m

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X. \tag{3.2}$$

Рассмотрим интегрирование этого уравнения движения в тех случаях, когда X является функцией либо только времени $[X = X(t)]$, либо координаты $[X = X(x)]$, либо скорости $[X = X(v)]$.

а) $$X = X(t).$$

Непосредственное интегрирование дает:

$$v - v_0 = \frac{1}{m}\int\limits_{t_0}^{t} X(t)\,dt = \frac{1}{m}Z(t). \tag{3.3}$$

Таким образом, интеграл силы по времени $Z(t)$ равен *изменению импульса* за время от t_0 до t.[1]

Вторичное интегрирование дает уравнение пути:

$$x - x_0 = v_0(t - t_0) + \frac{1}{m}\int_{t_0}^{t} Z(t)\,dt. \tag{3.4}$$

б) $$X = X(x).$$

Этот пример является типичным случаем *силового поля*, заданного в пространстве. Интегрирование производится с помощью закона сохранения энергии. Умножаем обе части уравнения (3.2) на $\frac{dx}{dt}$:

$$m \cdot \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = X\frac{dx}{dt}. \tag{3.5}$$

Теперь слева стоит полная производная

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\right\}.$$

В соответствии с общим определением (1.4), пишем справа $dA = X dx$ и называем dA работой, произведенной на пути dx. Получаемое таким образом уравнение гласит: *изменение кинетической энергии равно произведенной работе.*

Действительно, назовем по определению величину

$$T = E_{\text{кин}} = \frac{m}{2}v^2 \tag{3.6}$$

кинетической энергией или *энергией движения*; более старый термин «живая сила» (Лейбниц) отражает многозначность термина «сила» (противоположение *vis viva* и *vis motrix*; еще Гельмгольц дал своему сочинению, написанному в 1847 г., название «О сохранении силы»).

[1] Часто термином «импульс» обозначают интеграл действующей силы по времени, а равную ему величину $mv - mv_0$ называют изменением количества движения. (*Прим. ред.*)

Наряду с кинетической энергией, определим потенциальную энергию V как

$$dV = -dA = -X\,dx, \quad V = E_{\text{потенц.}} = -\int^{x} X\,dx. \tag{3.7}$$

В одномерной механике точки это определение достаточно; соответствующая же функция V для двух- и трехмерных силовых полей существует только в том случае, если эти поля удовлетворяют определенным условиям (ср. добавление к § 18). Согласно (3.7), V определено с точностью до аддитивной постоянной.

Воспользовавшись этими определениями, из проинтегрированного уравнения (3.5) получаем закон сохранения энергии:

$$T + V = \text{const} = W, \tag{3.8}$$

где W — постоянная энергии или «полная энергия».

Закон сохранения энергии имеет не только выдающееся физическое значение, но обладает еще и замечательной математической силой. Он позволяет, как мы видели, не только произвести первое интегрирование, но непосредственно выполнить также и второе интегрирование, по крайней мере в рассматриваемом нами случае б). А именно, если мы запишем (3.8) в форме

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}[W - V(x)],$$

то, разрешая это уравнение относительно dt, получим:

$$dt = \sqrt{\frac{m}{2(W - V)}}\,dx$$

и отсюда

$$t - t_0 = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{W - V}}. \tag{3.9}$$

Таким образом, нам известно t как функция x, а следовательно, и x как функция t. В соответствии с этим уравнение (3.9) представляет собой полностью проинтегрированное уравнение движения.

в) $$X = X(v).$$

Теперь уравнение движения гласит:

$$m\frac{dv}{dt} = X(v).$$

Перепишем его в виде

$$dt = \frac{m\,dv}{X},$$

откуда получим

$$t - t_0 = m\int\limits_{v_0}^{v} \frac{dv}{X} = F(v). \tag{3.10}$$

Этим уравнением определяется также v как функция t:

$$v = f(t).$$

Итак, мы имеем

$$\frac{dx}{dt} = f(t),$$

откуда следует

$$x - x_0 = \int\limits_{t_0}^{t} f(t)\,dt.$$

Примеры

1. Свободное падение вблизи земной поверхности

Направим ось x вверх. Сила

$$X = -mg \tag{3.11}$$

постоянна, т. е. не зависит от t и v. Следовательно, применимы все три способа интегрирования: а), б), в).

Мы проведем интегрирование способами а) и б) и при этом предположим, что «тяготеющая» масса и «инертная» масса равны друг другу:

$$m_{\text{тяг.}} = m_{\text{ин.}}. \tag{3.12}$$

$m_{\text{ин.}}$ — масса, определяемая второй аксиомой, $m_{\text{тяг.}}$ — масса, фигурирующая в законе тяготения, а потому также и в выражении силы тяжести (3.11).

Уже Бесселем была понята необходимость экспериментально проверить равенство (3.12) на опытах с маятником[1].

Значительно более точное экспериментальное доказательство этого равенства дал Этвёш с помощью своих крутильных весов. Позднее соотношение (3.12) дало первый толчок к теории тяготения Эйнштейна.

а) $\ddot{x} = -g$. При соответствующем выборе постоянной интегрирования ($v = 0$ и $x = h$ при $t = 0$) получаем:

$$\dot{x} = -gt \quad x = h - \frac{g}{2}t^2.$$

б) Из $dA = -mg\,dx$ получаем

$$V = mgx \quad \text{и} \quad T + mgx = W.$$

Если $v = 0$ при $x = h$, то $W = mgh$; следовательно,

$$\frac{m}{2}v^2 + mgx = mgh.$$

В частности, для $x = 0$ получается $x^2 = 2gh$,

$$v = \sqrt{2gh}. \tag{3.13}$$

Обратив это уравнение, получим

$$h = \frac{v^2}{2g}. \tag{3.13a}$$

Эта величина называется «скоростным напором». Она определяет ту высоту h, до которой должна быть поднята (произвольная) масса, чтобы

[1] Отметим, что уже у Ньютона в начале его механики, а именно в пояснении к «Определению I», мы находим следующее интересное положение: «Определяется масса по весу тела, ибо она пропорциональна весу, что мною найдено опытами над маятниками, произведенными точнейшим образом».

приобрести при падении в поле тяжести с этой высоты заданную скорость v. Введение этого «скоростного напора» вместо скорости в особенности удобно при рассмотрении ряда технических вопросов, например, высоты подъема воды в трубках Пито, величины давления в центрифугах и т. д. Разница в высоте уровней воды в ньютоновском «опыте с ведром» также дается формулой (3.13а).

2. Свободное падение с большой высоты (метеор)

В этом случае сила притяжения не является уже постоянной, а определяется законом тяготения (m — масса метеора, M — масса Земли, G — постоянная тяготения):

$$m\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^2}. \tag{3.14}$$

Здесь вместо координаты x мы ввели расстояние r, отсчитываемое от центра Земли. Так как сила зависит от r, то теперь может быть применен только способ интегрирования б).

В частности, из (3.14) получается следующее выражение для силы тяжести на земной поверхности:

$$mg = \frac{mMG}{a^2},$$

где a означает радиус Земли. Это соотношение позволяет исключить mMG из (3.14):

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -g\frac{a^2}{r^2}.$$

Из (3.7) получаем:

$$dV = -dA = mga^2\frac{dr}{r^2}.$$

Таким образом, для потенциальной энергии, если положить ее равной нулю на бесконечности, получим выражение:

$$V(r) = -mg\frac{a^2}{r}. \tag{3.15}$$

Поэтому из (3.8) следует:

$$\frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{mga^2}{r} = W = -\frac{mga^2}{R},$$

где R — гипотетическое начальное расстояние падающей массы от центра Земли, на котором она находилась в состоянии покоя. Таким образом, имеем:

$$\frac{dr}{dt} = a\sqrt{2g}\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} \tag{3.16}$$

и, соответственно уравнению (3.9),

$$t = \frac{1}{a\sqrt{2g}} \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}}}. \tag{3.16а}$$

Мы не станем вычислять значение входящего в (3.16а) интеграла, так как нас интересуют только два частных случая уравнения (3.16):

а) $$R = \infty, \quad r = a.$$

Метеор достигает Земли со скоростью

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2ga}.$$

Стало быть, при свободном падении с бесконечной высоты в поле тяготения тело приобрело бы на поверхности Земли ту же скорость, как и при свободном падении с высоты $h = a$ при постоянном ускорении силы тяжести g [см. уравнение (3.13)].

б) $$R = a + h, \quad h \ll a, \quad r = a.$$

Здесь речь идет о первой поправке к определяемой формулой (3.13) скорости падения, обусловленной уменьшением ускорения силы тяжести при удалении от Земли; предполагается, что падение происходит с не слишком большой высоты. Из (3.16) следует:

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2ga}\sqrt{1 - \frac{1}{1 + \frac{h}{a}}} = \sqrt{2ga}\left(\frac{h}{a} - \frac{h^2}{a^2} + \ldots\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{2ga}\sqrt{\frac{h}{a}}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{a} + \ldots\right) = \sqrt{2gh}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h}{a} + \ldots\right).$$

3. Свободное падение при учете сопротивления воздуха

Примем, что сопротивление воздуха пропорционально квадрату скорости. Это допущение, восходящее еще к Ньютону, достаточно хорошо согласуется с данными наблюдений в тех случаях, когда падающее тело не слишком мало и когда его скорость мала по сравнению со скоростью звука, но при этом не исчезающе мала. При таком допущении полная действующая сила равна

$$X(v) = -mg + av^2.$$

Знак последнего члена соответствует тому, что сопротивление воздуха противодействует силе тяжести [ср. выше случай в)]. Уравнение движения будет иметь вид

$$\frac{dv}{dt} = -g + \frac{a}{m}v^2. \tag{3.17}$$

Если положить $\frac{a}{mg} = b^2$, то оно переходит в

$$\frac{dv}{dt} = -g(1 - b^2v^2).$$

Отсюда, как и при выводе уравнения (3.10), положив $t_0 = 0$, получаем:

$$-g\,dt = \frac{dv}{2}\left(\frac{1}{1-bv} + \frac{1}{1+bv}\right), \quad -gt = \frac{1}{2b}\lg\frac{1+bv}{1-bv}.$$

Следовательно,

$$\frac{1+bv}{1-bv} = e^{-2bgt},$$

$$bv = \frac{e^{-2bgt} - 1}{e^{-2bgt} + 1} = -\frac{\mathrm{sh}(bgt)}{\mathrm{ch}(bgt)} = -\,\mathrm{th}(bgt). \tag{3.18}$$

Здесь sh, ch, th означают гиперболические функции. Таким образом, bv все время увеличивается от 0 и при $t = \infty$ приближается к единице. Предел, к которому стремится само v, равен

$$|v| = \frac{1}{b} = \sqrt{\frac{mg}{a}}.$$

Этот результат можно прямо получить из уравнения (3.17), так как при таком предельном значении скорости производная $\frac{dv}{dt}$ обращается в нуль.

Воспользуемся уравнением (3.18), чтобы получить первую поправку на сопротивление воздуха к формуле, выведенной для безвоздушного пространства. Из разложения в ряд

$$\operatorname{th} a = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{ch} a} = \frac{a + \frac{a^3}{6}}{1 + \frac{a^2}{2}} = a\left(1 - \frac{a^2}{3}\right),$$

полагая на основании (3.18) $a = bgt$, получим:

$$v = -gt\left(1 - \frac{(bgt)^2}{3}\right).$$

4. Гармонические колебания

Гармонические колебания возникают при действии на материальную точку m силы X, направленной к положению равновесия и пропорциональной отклонению x от этого положения. Если мы обозначим коэффициент пропорциональности через k, то

$$X = -kx,$$

и уравнение движения при постоянном m будет

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx. \tag{3.19}$$

Так как сила задана как функция координаты [случай б), стр. 30], то, согласно общему правилу для этого случая, при интегрировании мы применим закон сохранения энергии. Для этого нам необходимо прежде всего определить потенциальную энергию гармонической связи. Имеем

$$dA = X\,dx = -\frac{k}{2}\,d(x^2)$$

и, следовательно, согласно (3.7), при соответствующем выборе нулевого значения V,

$$V = -\int_0^x dA = \frac{k}{2}x^2.$$

Поэтому закон сохранения энергии в нашем случае гласит:

$$mv^2 + kx^2 = 2W.$$

В качестве начальных условий полагаем, например,

$$\text{при} \quad t = 0 \quad \begin{cases} x = a \\ v = \dot{x} = 0. \end{cases} \tag{3.19a}$$

Тогда $2W$ оказывается равным ka^2 и

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{k}{m}(a^2 - x^2), \quad \sqrt{\frac{k}{m}}\,dt = \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Следовательно, принимая во внимание начальные условия (3.19a),

$$\omega t = \arcsin\frac{x}{a} - \frac{\pi}{2}, \quad \text{где } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}. \tag{3.20}$$

Разрешая это уравнение относительно x, получим:

$$x = a\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = a\cos\omega t. \tag{3.21}$$

Теперь становится ясным физический смысл введенной нами величины ω. Она означает «круговую частоту», т. е. число колебаний в 2π единиц времени. Если τ означает период колебания, а ν — число колебаний в единицу времени[1], то

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi\nu. \tag{3.22}$$

Пользуясь этим обозначением, можно вместо (3.19) написать также:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \tag{3.23}$$

[1] В отличие от ω, буквой ν обозначают число колебаний за одну единицу времени (секунду). Вместо «число колебаний» часто говорят просто «частота».

Закон сохранения энергии имеет то преимущество, что он всегда приводит к цели, каким бы образом сила X ни зависела от x. Для нашего же случая, в котором X линейно зависит от x, существует другой, значительно более изящный, способ решения уравнения движения. Он основывается на непосредственно очевидном положении, что однородное линейное дифференциальное уравнение любого порядка с постоянными коэффициентами (x — искомая функции, t — независимая переменная) всегда имеет решение вида:

$$x = Ce^{\lambda t}, \tag{3.24}$$

если только в качестве λ выбрать корень некоторого алгебраического уравнения, получающегося из данного дифференциального уравнения. Выражение (3.24) является частным решением дифференциального уравнения; общее же его решение получается путем суперпозиции всех таких частных решений:

$$x = \sum C_j e^{\lambda_j t}. \tag{3.24а}$$

В случае нашего уравнения (3.23) алгебраическое уравнение для λ оказывается квадратным:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0; \quad \text{корни его } \lambda = \pm i\omega.$$

Поэтому общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}. \tag{3.24б}$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий (3.19а):

$$\dot{x} = 0 \quad \text{дает:} \quad C_1 i\omega - C_2 i\omega = 0; \quad C_1 = C_2.$$

$$x = a \quad \text{дает:} \quad a = C_1 + C_2 = 2C_1; \quad C_1 = \frac{a}{2}.$$

Итак, в согласии с (3.21), окончательное решение задачи гласит:

$$x = a\cos\omega t.$$

В дальнейшем (гл. III, § 19) мы будем часто пользоваться этим методом для рассмотрения затухающих, вынужденных, связанных и других колебаний, поскольку эти колебания могут быть описаны линейными дифференциальными уравнениями. Заглавие «гармонические колебания», которое мы дали этому параграфу, указывает на линейный закон упругой силы, из которого следует, что движение может быть охарактеризовано одной определенной частотой ω. Для «ангармонической», т. е. нелинейной связи, этот метод непригоден; в таких случаях приходится пользоваться менее изящным методом, основанным на применении закона сохранения энергии.

5. Соударение двух материальных точек

Допустим, что перед ударом (рис. 1) материальные точки m и M имеют скорости v_0 и V_0; скорости после удара будут v и V.

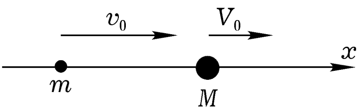

Рис. 1. Соударение двух масс M и m; скорости до удара V_0, v_0; после удара V, v

Как бы ни происходил удар в каждом отдельном случае — упруго или неупруго, — аксиома Ньютона: действие равно противодействию, всегда будет справедлива для сил взаимодействия между m и M, а стало быть, и для интеграла этих сил по времени. Поэтому, согласно уравнению (3.3),

$$m(v - v_0) = Z = -M(V - V_0) \tag{3.25}$$

и, следовательно,

$$mv + MV = mv_0 + MV_0. \tag{3.25а}$$

Это уравнение выражает сохранение общего импульса системы.

Если ввести координату центра тяжести

$$\xi = \frac{mx + MX}{m + M}, \tag{3.25б}$$

то уравнение (3.25а) можно написать в виде:

$$\dot{\xi} = \dot{\xi}_0.$$

Таким образом, этот закон движения центра тяжести утверждает, что удар не оказывает никакого влияния на скорость движения центра тяжести.

Например, центр тяжести вылетевшей из ствола орудия гранаты продолжает беспрепятственно описывать (в безвоздушном пространстве) параболическую траекторию брошенного тела даже в том случае, если граната в какой-либо точке траектории разорвалась на осколки, траектории которых кажутся независимыми друг от друга.

Для полного решения проблемы удара надо сделать еще один шаг, так как для определения двух неизвестных v и V мы имеем лишь одно уравнение (3.25а). «Упругий удар» мы определяем как такое взаимодействие, при котором сохраняется не только импульс, но и кинетическая энергия системы. Таким образом, мы требуем, чтобы

$$\frac{m}{2}v^2 + \frac{M}{2}V^2 = \frac{m}{2}{v_0}^2 + \frac{M}{2}{V_0}^2. \tag{3.26}$$

Следовательно,

$$m(v^2 - {v_0}^2) = M({V_0}^2 - V^2).$$

С другой стороны, согласно (3.25),

$$m(v - v_0) = M(V_0 - V).$$

Путем почленного деления последних двух уравнений получим:

$$v + v_0 = V_0 + V;$$

следовательно,

$$V - v = -(V_0 - v_0). \tag{3.26a}$$

Это уравнение гласит, что *относительные скорости* обеих масс после удара и до удара равны между собою, но противоположны по направлению.

Путем сопоставления уравнений (3.25а) и (3.26а) получаем

$$\begin{aligned} mv + MV &= mv_0 + MV_0, \\ v - V &= -v_0 + V_0. \end{aligned}$$

Отсюда однозначно определяются скорости после удара. Именно,

$$\left.\begin{aligned} v &= \frac{m-M}{m+M}v_0 + \frac{2M}{m+M}V_0, \\ V &= \frac{M-m}{m+M}V_0 + \frac{2m}{m+M}v_0. \end{aligned}\right\} \tag{3.27}$$

Следует заметить, что определитель Δ этого «преобразования» от начальных значений v_0, V_0 к конечным значениям v, V по абсолютной величине равен 1. Действительно,

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{m-M}{m+M} & \dfrac{2M}{m+M} \\ \dfrac{2M}{m+M} & \dfrac{M-m}{m+M} \end{vmatrix} = -\left(\frac{M-m}{m+M}\right)^2 - \frac{4mM}{(m+M)^2} = -1.$$

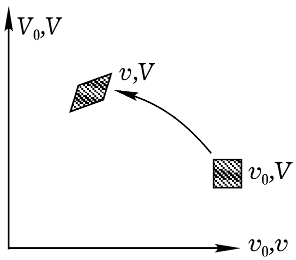

Рис. 2а. Области изменения скоростей до и после удара. Преобразование не искажает площадей

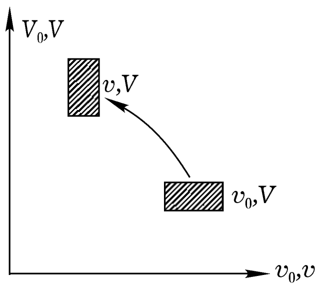

Рис. 2б. При равных массах $m = M$ преобразование не искажает ни площадей, ни углов

В применении к какому-либо интервалу значений скоростей это означает, что преобразованный элемент (на плоскости v, V) равновелик начальному элементу (на плоскости v_0, V_0). Другими словами, рассматриваемое преобразование не изменяет площадей (рис. 2а). Это положение играет важную роль при рассмотрении процессов соударения в кинетической теории газов и тесно связано с теоремой Лиувилля [1].

[1] У читателя, знакомого с теоремой Лиувилля, может возникнуть вопрос: почему в рассматриваемом случае преобразования от v_0, V_0 к v, V якобиан Δ равен минус единице?

Если бы вычислить якобиан преобразования импульсов p_0, P_0 к p, P, то он оказался бы равным также минус единице. Между тем, по теореме Лиувилля якобиан преобразования равен плюс единице. Между этими утверждениями нет противоречия, так как в теореме Лиувилля речь идет о преобразовании не только импульсов, но и координат. В применении к случаю удара упругих шаров теорема Лиувилля

Для двух равных масс $m = M$, например, для двух бильярдных шаров, уравнения (3.27) переходят в

$$v = V_0, \quad V = v_0. \tag{3.27а}$$

В этом случае преобразование не искажает ни площадей, ни углов (рис. 2б), так как преобразованный прямоугольник получается из исходного путем перестановки сторон. В частности, если при игре на бильярде один из шаров находится в состоянии покоя, то другой шар при центральном ударе передает первому шару всю свою скорость и приходит сам в состояние покоя [см. (3.27а) при $V_0 = 0$].

С другой стороны, если одна масса значительно больше другой $M \gg m$, то большая масса при соударении сохраняет почти неизменной свою первоначальную скорость, тогда как малая масса следует за большой со скоростью, отличающейся от скорости последней на величину первоначальной относительной скорости обеих масс. Действительно, при $m \ll M$ уравнения (3.27) упрощаются и принимают вид:

$$v = -v_0 + 2V_0 = V_0 - (v_0 - V_0), \quad V = V_0. \tag{3.27б}$$

гласит:

$$\frac{D(x,\, X,\, g,\, G)}{D(x_0,\, X_0,\, g_0,\, G_0)} = +1, \tag{а}$$

где x_0, X_0, g_0, G_0 — координаты и импульсы шаров в момент времени t_0, а x, X, g, G в момент времени t. Если исключить из рассмотрения время удара, когда шары взаимодействуют между собой, то импульсы g, G не будут зависеть от x_0, X_0, так что:

$$\frac{D(x,\, X,\, g,\, G)}{D(x_0,\, X_0,\, g_0,\, G_0)} = \frac{D(x,\, X)}{D(x_0,\, X_0)} \cdot \frac{D(g,\, G)}{D(g_0,\, G_0)} = +1.$$

Если между моментами времени t_0 и t не было столкновения, то $g = g_0$, $G = G_0$. Поэтому

$$\frac{D(g,\, G)}{D(g_0,\, G_0)} = +1; \quad \frac{D(x,\, X)}{D(x_0,\, X_0)} = +1. \tag{б}$$

Если же было столкновение, то, как легко проверить,

$$\frac{D(g,\, G)}{D(g_0,\, G_0)} = -1; \quad \frac{D(x,\, X)}{D(x_0,\, X_0)} = -1.$$

В обоих случаях равенство (а) остается справедливым. (*Прим. ред.*)

В виде дополнения к вопросу об упругом ударе скажем несколько слов о неупругих ударах. В атомной физике исследуются неупругие удары, так наз. «удары второго рода», при которых ударяющая частица (например, электрон) затрачивает часть своей энергии на то, чтобы *возбудить* «ударяемый атом», т. е. «поднять» его из его основного состояния на более высокий энергетический уровень. Так как при этом энергия движения после удара меньше начальной энергии, то это движение нельзя рассчитывать по формулам упругого удара (ср. задачи I. 1–I. 4).

Мы ограничиваемся случаем «совершенно неупругого удара», который часто рассматривается в технических проблемах. Такой удар по определению характеризуется тем, что после удара обе массы m и M движутся вместе, так что

$$v = V.$$

Закон сохранения импульса, который, как мы уже подчеркивали, остается справедливым во всех случаях, в данном случае гласит:

$$(m + M)v = mv_0 + MV_0. \tag{3.28}$$

Он достаточен для определения теперь уже единственной неизвестной v. Рассмотрим потерю энергии при неупругом ударе:

$$\frac{m}{2}{v_0}^2 + \frac{M}{2}{V_0}^2 - \frac{m+M}{2}v^2.$$

С помощью (3.28) эту величину можно привести к виду

$$\frac{\mu}{2}(v_0 - V_0)^2. \tag{3.28а}$$

Следовательно, она равна *кинетической энергии некоторой «приведенной» массы μ, движущейся с первоначальной относительной скоростью соударяющихся тел.* При этом μ определяется условием

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M}; \quad \text{таким образом,} \quad \mu = \frac{mM}{m+M}. \tag{3.28б}$$

Закон, содержащийся в уравнениях (3.28а, б), был установлен генералом Лазарем Карно (математик и организатор всеобщей воинской повинности во время Французской революции, дядя Сади Карно, имя которого останется бессмертным в термодинамике).

§ 4. ПЕРЕМЕННЫЕ МАССЫ

В нижеследующих примерах речь идет о критическом толковании второй аксиомы Ньютона. Мы высказали ее в форме уравнения (1.3): «изменение импульса равно силе», и отклонили для общего случая форму (1.3а): «масса $\times$ ускорение $=$ силе».

Теперь мы поясним, что надо понимать под изменением импульса. При этом окажется, что даже справедливая при всех условиях форма закона (1.3) при известных обстоятельствах сводится к (1.3а).

Рассмотрим пример из обыденной жизни: летом по асфальтированной мостовой движется автомобиль для поливки улиц. Сила тяги мотора как раз достаточна для преодоления трения об асфальт, а также трения о воздух и в осевых подшипниках. Таким образом, внешние силы на автомобиль не действуют. Пусть m будет сумма массы воды, содержащейся в данный момент в резервуаре, и постоянной массы самого автомобиля. Обозначим количество воды, выбрасываемое в единицу времени, через $\mu = -m$. Скорость истечения воды по отношению к автомобилю пусть будет q; так как вода выбрасывается назад, то ее скорость по отношению к улице будет $v - q$.

Если механически применить формулу (1.3), то она дала бы

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}(mv) = 0, \tag{4.1}$$

откуда следовало бы

$$m\dot{v} = \mu v. \tag{4.1a}$$

Таким образом, ускорение автомобиля не зависело бы от скорости истечения q. Это парадоксально, ибо отдача, происходящая от выброса воды (сравните пушку), должна сказаться на движении автомобиля.

На самом деле изменение импульса, подразумевавшееся в уравнении (1.3), было выражено нами неправильно. Оно состоит не только из члена, учтенного в (4.1), но и из импульса водяных струй, уносящих за единицу времени импульс $\mu(v - q)$. Запишем это подробно:

$$G_t = mv, \quad G_{t+dt} = (m + dm)(v + dv) + \mu\, dt(v - q).$$

Следовательно, истинное изменение импульса равно

$$\dot{G} = \frac{d}{dt}(mv) + \mu(v - q) = 0, \tag{4.2}$$

так как $\mu = -\dot{m}$, то отсюда после сокращения получим:

$$m\dot{v} = \mu q. \tag{4.3}$$

Таким образом, если толковать это уравнение в смысле (1.3а), то отдача μq вытекающей водяной струи действует как ускоряющая сила, подобно тому, как в *сегнеровом* водяном колесе.

Вместо примера с автомобилем для поливки улиц можно было бы привести пример «ракеты для полета в мировое пространство», при помощи которой хотели достигнуть Луны. Пороховые газы ракеты должны двигать ее вперед (см. задачу 1.5).

Обобщим полученные результаты в виде двух утверждений, соответствующих уравнениям (4.2) и (4.3) нашего примера.

1) Можно стать на точку зрения уравнения (1.3), но при этом нужно прибавить к изменению импульса рассматриваемого тела импульс, конвективно отданный или воспринятый им в единицу времени. Этот импульс нужно измерять в той же системе отсчета, что и импульс рассматриваемого тела; правильный знак этого импульса обеспечивается выбором знака $\dot{m}$. Тогда уравнение движения имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) - \dot{m}\mathbf{v}' = \mathbf{F}. \tag{4.4}$$

где $\mathbf{v}'$ — конвективная скорость. В нашем случае $-\dot{m} = \mu$ и $v' = v - q$.

2) Можно также стать на точку зрения уравнения (1.3а). В этом случае мы должны дополнительно учесть силу отдачи импульса, отданного или полученного телом в единицу времени, рассматривая эту силу в некотором смысле как внешнюю силу. Таким образом, мы получим уравнение движения в форме, аналогичной уравнению (4.3):

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} + \dot{m}\mathbf{v}_{\text{отн.}}. \tag{4.5}$$

Здесь $\mathbf{v}_{\text{отн.}}$ — относительная скорость конвективного импульса по отношению к рассматриваемому телу. В нашем примере было $v_{\text{отн.}} = -q$ и $-\dot{m} = \mu$[1].

---

[1]Пусть система состоит из двух тел, массы которых равны m и m' и которые

Необходимо остановиться на двух частных случаях:

а) $\mathbf{v}' = 0$. Отводимые или подводимые элементы массы имеют скорость, равную нулю, и поэтому не уносят с собой импульса. В этом случае уравнение движения имеет ньютонову форму $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$. Пример: водяные капли, цепь (см. задачи 1.6 и 1.7).

б) $\mathbf{v}' = \mathbf{v}$, или, что то же самое, $\mathbf{v}_{\text{отн.}} = 0$. Уравнение движения, несмотря на переменную массу, имеет форму «масса × ускорение = = силе». Пример: канат, свешивающийся с горизонтальной подставки[1] (см. задачу 1.8).

движутся со скоростями $\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}'$. Массы m и m' могут меняться с течением времени, однако сумма их должна оставаться постоянной:

$$m + m' = \text{const}. \tag{а}$$

Полный импульс такой системы равен:

$$\mathbf{G} + \mathbf{G}' = m\mathbf{v} + m'\mathbf{v}'.$$

Поэтому если $\mathbf{F}$ — равнодействующая всех внешних сил, действующих на систему, то

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} + \frac{d\mathbf{G}'}{dt} = \mathbf{F}.$$

Подставляя сюда $\mathbf{G}' = m'\mathbf{v}'$ и принимая во внимание, что в силу (а) $\dot{m}' = -\dot{m}$, получим:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} - \dot{m}\mathbf{v}' + m'\dot{\mathbf{v}}' = \mathbf{F}. \tag{б}$$

Если в рассматриваемый момент времени $m' = 0$, то для этого момента уравнение (б) гласит:

$$\frac{d\mathbf{G}}{dt} - \dot{m}\mathbf{v}' = \mathbf{F}, \tag{в}$$

что совпадает с формулой (4.4). Но уравнение (в) справедливо и при $m' \neq 0$, если только под $\mathbf{F}$ понимать равнодействующую всех сил, действующих на массу m, включая и силы, с которыми действует на нее масса m'. Действительно, в любой момент времени можно из нашей системы тел выделить подсистему двух тел, масса одного из которых в рассматриваемый момент времени равна нулю. Рассматривая остальную часть системы как «внешние тела» по отношению к выделенной подсистеме, мы и получим уравнение (в). (*Прим. ред.*)

[1]Уравнение движения имеет такую форму для свешивающейся части каната и для части, лежащей на горизонтальной плоскости. Однако при этом необходимо принять во внимание все силы, действующие на рассматриваемую часть каната. Уравнение движения свешивающейся части каната гласит:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = mg + \mathbf{F},$$

где m — масса этой части каната, а $\mathbf{F}$ — сила, с которой действует на нее другая часть каната. Обозначая соответствующие величины для этой другой части через m'

В случае б) потеря энергии по Карно [уравнение (3.28а)] равна нулю; поэтому закон сохранения энергии действителен в обычной форме. В случае а) нужно в каждой отдельной конкретной проблеме находить применимую к нему форму закона сохранения энергии, в зависимости от поставленной задачи.

В заключение рассмотрим проблему релятивистского изменения массы. При этом мы будем говорить специально об электроне, хотя формула массы (2.20) справедлива не только для электрона, но и для любой другой массы. Изменение массы является «внутренним свойством» электрона и отнюдь не связано с передачей ему импульса извне. Поэтому, как и в случае а), уравнение движения гласит $\dot{\mathbf{G}} = \mathbf{F}$ или, принимая во внимание (2.20),

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) = \mathbf{F}. \tag{4.6}$$

Рассмотрим сначала прямолинейное движение электрона; пусть, следовательно, $\mathbf{F}$ действует «продольно», т. е. в направлении $\mathbf{v}$.

Приведем уравнение (4.6) к форме: «масса $\times$ ускорение = силе», как это (нецелесообразно) делалось прежде (около 1900 г.). Для этого произведем дифференцирование в левой стороне уравнения и получим:

$$\frac{m_0\dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + m_0 v\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(\dot{v} + \frac{v\beta\dot{\beta}}{1-\beta^2}\right). \tag{4.6a}$$

Так как $\beta = \frac{v}{c}$, то

$$\dot{\beta} = \frac{\dot{v}}{c} \quad \text{и поэтому} \quad v\beta\dot{\beta} = \beta^2\dot{v}.$$

и $\mathbf{F}'$, получим

$$m'\frac{d\mathbf{v}'}{dt} = \mathbf{F}'.$$

Так как $\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}'(t)$ и $\mathbf{F} = -\mathbf{F}'$, то путем сложения находим уравнение движения всего каната:

$$(m+m')\frac{d\mathbf{v}}{dt} = mg.$$

В этом уравнении масса всего каната $(m+m')$, конечно, постоянна. (*Прим. ред.*)

Следовательно, уравнение (4.6а) приводится к следующему виду:

$$\frac{m_0\dot{v}}{\sqrt{1-\beta^2}}\left(1+\frac{\beta^2}{1-\beta^2}\right)=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}\dot{\mathbf{v}}=\mathbf{F}. \tag{4.6б}$$

Таким образом, «продольную» массу, определяемую как коэффициент при $\dot{\mathbf{v}}$ в уравнении движения, нужно положить равной

$$m_{\text{прод.}}=\frac{m_0}{(1-\beta^2)^{3/2}}. \tag{4.7}$$

Однако, если $\mathbf{F}$ действует в «поперечном» направлении, т. е. нормально к траектории, то скорость изменяется не по величине, а только по направлению. Тогда $\dot{\beta}$ равно 0, и из (4.6) непосредственно следует:

$$\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\dot{\mathbf{v}}_{\text{норм.}}=\mathbf{F}.$$

Поэтому была введена отличная от продольной «поперечная» масса

$$m_{\text{поп.}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4.8}$$

Мы, однако, подчеркиваем, что это различие пропадает, если пользоваться законом движения в рациональной форме (4.6).

Познакомимся теперь с формой закона сохранения энергии в теории относительности. Для этой цели помножим (4.6) на $\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}=\beta c\frac{\mathbf{v}}{v}$. В правой части получим:

$$\frac{\mathbf{F}\,dr}{dt}=\frac{dA}{dt}=\text{произведенной работе}. \tag{4.9}$$

В левой части получим:

$$m_0c^2\beta\frac{d}{dt}\left(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)=m_0c^2\beta\dot{\beta}(1-\beta^2)^{-3/2}.$$

Но это выражение, как легко убедиться, является полной производной по t, а именно, оно равно

$$m_0c^2\frac{d}{dt}\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{4.10}$$

Так как выражение (4.10) равно произведенной работе [уравнение (4.9)], то оно означает скорость изменения кинетической энергии T. Таким образом, имеем:

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} + \text{const.} \right).$$

Здесь следует положить const равной -1, так как T по смыслу должно обращаться в нуль при $\beta = 0$. Таким образом, в теории относительности кинетическая энергия выражается в виде

$$T = m_0 c^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \tag{4.11}$$

Принимая во внимание (2.20), можем также написать

$$T = c^2 (m - m_0). \tag{4.12}$$

Разность энергии движущегося и покоящегося электрона (а это и есть кинетическая энергия или «живая сила») *равна помноженной на* c^2 *разности масс движущегося и покоящегося электронов.* Этим мы подтвердили в нашем простейшем случае общий *закон инерции энергии*, который охватывает всю область определения атомных весов, физику атомного ядра, а в дальнейшем развитии и космологию.

Для полноты укажем, что при малом β из выражения (4.11) путем разложения его в ряд получается, как и следовало ожидать, элементарное выражение для T:

$$\begin{aligned} T &= m_0 c^2 \left(\tfrac{1}{2}\beta^2 - \tfrac{3}{8}\beta^4 + \ldots \right) = \\ &= \frac{m_0}{2} c^2 \beta^2 \left(1 - \tfrac{3}{4}\beta^2 + \ldots \right) \longrightarrow \frac{m_0}{2} v^2. \end{aligned}$$

§ 5. КИНЕМАТИКА И СТАТИКА МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ И В ПРОСТРАНСТВЕ

Кинематика изучает геометрию движений, не касаясь условий их физической реализации. Статика[1] есть учение о силах, их сложении и эквивалентности, не касающееся вызываемых ими движений.

[1]Собственно говоря, термин «статика» неудачен, так как он односторонне указывает на вопросы равновесия, тогда как вопросы статики имеют отношение как

1. Кинематика на плоскости

Прежде всего приведем формулы для разложения и сложения скоростей и ускорений в прямоугольных координатах.

Скорость:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{v}_x, \mathbf{v}_y) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) = (\dot{x}, \dot{y}), \tag{5.1}$$

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = v. \tag{5.2}$$

Ускорение:

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{\mathbf{v}}_x, \dot{\mathbf{v}}_y) = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}\right) = (\ddot{x}, \ddot{y}), \tag{5.3}$$

$$|\dot{\mathbf{v}}| = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2}. \tag{5.4}$$

Вместо того, чтобы разлагать скорость и ускорение по прямоугольным координатам, мы можем разлагать их также по «естественным координатам» кривой, описываемой нашей материальной точкой. Пусть s будет длина дуги и пусть индекс s означает изменяющееся вдоль кривой направление траектории, а индекс n — нормаль к ней. Тогда

$$v_s = \pm v, \quad v_n = 0. \tag{5.5}$$

Это тривиально. Существенным же является разложение $\dot{\mathbf{v}}$ на $\dot{\mathbf{v}}_s$ и $\dot{\mathbf{v}}_n$[1].

Если α — угол между касательной к траектории и направлением оси x, то прежде всего получаем следующее выражение для *касательного ускорения*:

$$\dot{v}_s = \dot{v}_x \cos\alpha + \dot{v}_y \sin\alpha \tag{5.6}$$

к проблемам движения, так и к проблемам равновесия. Более правильный термин «динамика» неприменим, так как он исторически установлен для движений, вызываемых силами.

[1] Под $\dot{v}_n$ Зоммерфельд понимает не производную проекции v_n, как это принято, а проекцию производной вектора $\mathbf{v}$ по времени на направление нормали n. Иными словами, сначала следует продифференцировать вектор $\mathbf{v}$, а затем взять его проекцию. Результат не зависит от порядка выполнения этих операций только тогда, когда направление прямой n, на которую производится проектирование, не изменяется по мере движения точки вдоль траектории. (*Прим. ред.*)

и для *нормального ускорения*:

$$\dot{v}_n = -\dot{v}_x \sin\alpha + \dot{v}_y \cos\alpha. \tag{5.7}$$

Далее,

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \frac{\dot{x}}{\dot{s}} = \frac{v_x}{v},$$

$$\sin\alpha = \frac{dy}{ds} = \frac{\dot{y}}{\dot{s}} = \frac{v_y}{v}.$$

Следовательно,

$$\dot{v}_s = \frac{1}{v}(v_x\dot{v}_x + v_y\dot{v}_y) = \frac{1}{2v}\frac{d}{dt}({v_x}^2 + {v_y}^2) = \frac{1}{2v}\frac{d}{dt}v^2 = \frac{dv}{dt} = \dot{v}. \tag{5.8}$$

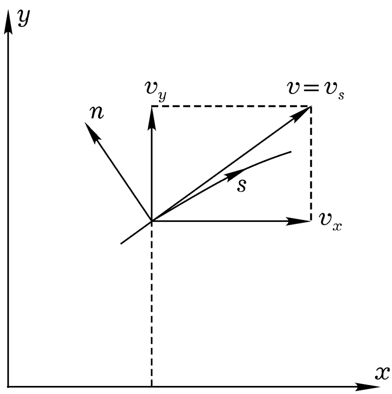

Рис. 3. Разложение вектора скорости при движении на плоскости; естественные координаты s и n

Эта формула гласит: касательное ускорение есть изменение величины скорости; изменение направления не имеет для него значения.

С другой стороны, согласно (5.7),

$$\begin{aligned}\dot{v}_n &= \frac{1}{v}(v_x\dot{v}_y - v_y\dot{v}_x) = \\ &= \frac{1}{v}(\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}) = \\ &= v^2\frac{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} = \frac{v^2}{\rho},\end{aligned} \tag{5.9}$$

где $\frac{1}{\rho}$ — кривизна траектории.

Таким образом, нормальное ускорение зависит не от изменения величины скорости, а только от *самой скорости* и от *формы траектории*.

Если, в частности, $\frac{dv}{dt} = 0$, то ускорение перпендикулярно к скорости, а, следовательно, и к траектории.

Дадим еще прямой дифференциально-геометрический вывод этих же соотношений с помощью введенного Гамильтоном *годографа*[1].

[1]Термин «годограф» («записыватель пути») неточен, правильнее было бы применить термин «записыватель скорости» или еще лучше — «полярная диаграмма скорости».

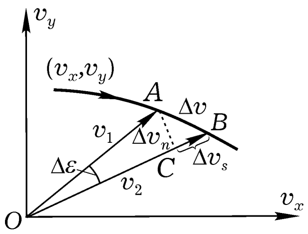

Рис. 4а. Годограф движения на плоскости. Скорости $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ откладываются в полярной диаграмме от полюса O

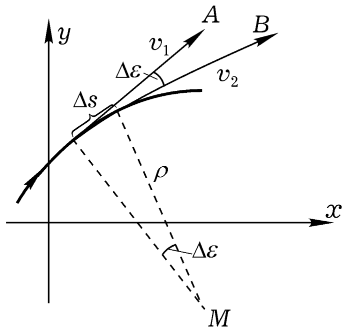

Рис. 4б. Траектория движения на плоскости и ее радиус кривизны

Что надо понимать под годографом, видно из сравнения рис. 4а с рис. 4б. Рис. 4б представляет траекторию в плоскости xy. В двух соседних точках этой траектории, находящихся друг от друга на расстоянии Δs, начерчены скорости по касательным к траектории; угол между ними равен $\Delta\varepsilon$. На рис. 4б угол $\Delta\varepsilon$ отмечен также из центра кривизны M; если под ρ понимать радиус кривизны, то

$$\Delta s = \rho \Delta \varepsilon. \tag{5.10}$$

С другой стороны, на рис. 4а обе эти скорости перенесены параллельно самим себе в полюс O. Рассмотрим два соседних вектора $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$; они образуют друг с другом угол $\Delta\varepsilon$. Проектируя точку A на прямую OB, получим точку C; $\Delta\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ разлагается на $\Delta\mathbf{v}_s = \overrightarrow{CB}$ и $\Delta\mathbf{v}_n = \overrightarrow{AC}$. Соответственно этому, получаем в подтверждение равенств (5.8) и (5.9):

$$\dot{v}_s = \frac{CB}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{\Delta t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt};$$

$$\dot{v}_n = \frac{AC}{\Delta t} = \frac{\Delta\varepsilon \cdot v}{\Delta t} = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s} v^2 = \frac{v^2}{\rho}.$$

В последнем уравнении мы воспользовались соотношением (5.10) [см. задачу I. 9].

2. Понятие момента в статике и кинематике на плоскости

Момент вектора $\mathbf{V}$ относительно данной точки O определяется как *векторное произведение* радиус-вектора $\mathbf{r}$, проведенного из O в точку приложения P вектора, и самого вектора:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{V}]\,. \tag{5.11}$$

Следовательно, $\mathbf{M}$ равно площади параллелограмма, образованного $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$. Направление $\mathbf{M}$ соответствует кратчайшему повороту, приводящему $\mathbf{r}$ в совпадение с $\mathbf{V}$ (если $\mathbf{r}$ и $\mathbf{V}$ отложены из одной и той же точки); на рис. 5 это направление поворота отмечено стрелкой. Если ввести «плечо рычага» l, то по абсолютной величине

$$|\mathbf{M}| = l|\mathbf{V}| = r|\mathbf{V}|\sin\alpha. \tag{5.11a}$$

Если положить $\mathbf{V}$ равным силе $\mathbf{F}$, то получим «момент силы»

$$\mathbf{M} = [\mathbf{r}\mathbf{F}]\,. \tag{5.12}$$

Момент силы является одним из о с н о в н ы х п о н я т и й с т а т и к и, введенным еще Архимедом. Если мы обозначим проекции $\mathbf{F}$ на оси координат через X и Y, то по правилам элементарного векторного исчисления получим

$$M = xY - yX. \tag{5.12a}$$

Понятие момента важно также для кинематики и кинетики. Ограничиваясь сначала плоской задачей, введем:

момент скорости $= [\mathbf{r}\mathbf{v}]$,

момент ускорения $= [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]$.

Момент количества движения $=$ моменту импульса $= [\mathbf{r}\mathbf{G}] = m\,[\mathbf{r}\mathbf{v}]$.

По образцу уравнения (5.12a), получаем в прямоугольных координатах

$$\begin{aligned} |\,[\mathbf{r}\mathbf{v}]\,| &= |x\dot{y} - y\dot{x}|,\\ |\,[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]\,| &= |x\ddot{y} - y\ddot{x}|. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Между моментом скорости и моментом ускорения существует следующее соотношение:

$$[\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}] = \frac{d}{dt}\,[\mathbf{r}\mathbf{v}]\,. \tag{5.14}$$

Приняв во внимание, что $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}$ и $[\mathbf{v}\mathbf{v}] = 0$, его можно доказать путем следующего простого вычисления:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{r}\mathbf{v}] = \left[\mathbf{r}\frac{d\mathbf{v}}{dt}\right] + [\mathbf{v}\mathbf{v}] = [\mathbf{r}\dot{\mathbf{v}}]. \tag{5.14а}$$

Обычное доказательство, использующее координатную форму записи, проводится совершенно аналогично:

$$\frac{d}{dt}(x\dot{y} - y\dot{x}) = x\ddot{y} + \dot{x}\dot{y} - y\ddot{x} - \dot{y}\dot{x} = x\ddot{y} - y\ddot{x}. \tag{5.14б}$$

Если отождествить произвольный вектор $\mathbf{V}$ (рис. 5) со скоростью $\mathbf{v}$ точки P, описывающей произвольную траекторию, то можно получить еще одно простое соотношение между моментом импульса и так называемой ***секториальной скоростью.*** А именно, описанный радиусом-вектором из O бесконечно малый элемент площади $d\mathbf{S}$ равен половине параллелограма $[\mathbf{r}d\mathbf{s}]$; следовательно, секториальная скорость равна

$$\frac{d\mathbf{S}}{dt} = \frac{1}{2}[\mathbf{r}\mathbf{v}].$$

Отсюда для момента импульса следует соотношение

$$[\mathbf{r}\mathbf{G}] = 2m\frac{d\mathbf{S}}{dt}. \tag{5.15}$$

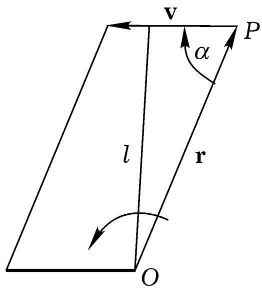

Рис. 5. Момент произвольного вектора $\mathbf{V}$ относительно произвольной точки O

3. Кинематика в пространстве

Если разложить скорость и ускорение по направлениям $\mathbf{s}$ (касательная), $\mathbf{n}$ (главная нормаль) и $\mathbf{b}$ (бинормаль) пространственной траектории, то получим следующие слагающие:

$$\mathbf{v} = (v,\ 0,\ 0),$$

$$\dot{\mathbf{v}} = (\dot{v},\ \frac{v^2}{\rho},\ 0),$$

где ρ есть введенный в (5.9) или (5.10) радиус кривизны, построение которого теперь надо производить в соприкасающейся плоскости траектории.

Момент скорости и момент ускорения в пространстве определяются, как и на плоскости, через векторные произведения $[\mathbf{rv}]$, $[\mathbf{r\dot{v}}]$. Отметим, однако, что рис. 5 теперь надо понимать как пространственную. Изображенный на рис. 5 параллелограмм характеризуется, помимо величины и направления вращения, еще и *положением в пространстве.* Для наглядности это положение обычно характеризуется нормалью к плоскости параллелограмма. При этом по общей договоренности выбирают то направление нормали, которое образует с направлением момента вращения *правовинтовую систему.* Тогда векторным изображением момента будет направленная по этой нормали стрелка, длина которой равна величине момента. В гл. IV, § 23, мы подробно остановимся на таком способе изображения и на различии между аксиальными и полярными векторами.

Здесь мы рассмотрели момент относительно (произвольно выбираемой) точки O. В следующем разделе мы разъясним, что мы будем понимать под моментом относительно заданной оси.

4. Статика в пространстве. Момент силы относительно точки и относительно оси

Момент силы $\mathbf{F}$ относительно заданной точки O полностью определяется выражением:

$$\mathbf{M} = [\mathbf{rF}]\,, \tag{5.16}$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, проведенный из точки O в точку приложения P силы $\mathbf{F}$, т. е.

$$\mathbf{r} = (x,\, y,\, z), \tag{5.16a}$$

если мы примем O за начало координат. Согласно только что приведенному правилу (правило правого винта, стрелка длиною $|\mathbf{M}|$), $\mathbf{M}$ можно изобразить вектором момента. Требуется найти *слагающие* $\mathbf{M}$ *по осям координат.* Мы можем их определить как проекции вектора момента на эти оси, например:

$$M_z = |\mathbf{M}| \cos(\mathbf{M},\, z). \tag{5.17}$$

Но так как $|\mathbf{M}|$ есть площадь параллелограмма, построенного на $\mathbf{r}$ и $\mathbf{M}$, то правая часть уравнения (5.17) означает в то же время площадь параллелограмма, спроектированную на площадь xy. Эта площадь имеет стороны

$$\mathbf{r}_{\text{пр.}} = x,\, y; \quad \mathbf{F}_{\text{пр.}} = X,\, Y.$$

Поэтому из (5.17) в согласии с (5.12а) следует

$$M_z = xY - yX, \tag{5.17а}$$

а также

$$M_x = yZ - zY, \quad M_y = zX - xZ. \tag{5.17б}$$

Эти слагающие M_x, M_y, M_z называют также моментами силы $\mathbf{F}$ *относительно* осей x, y, z (см. задачу I. 10).

Все сказанное здесь относительно осей координат применимо также и к любой оси a. Стало быть, в соответствии с уравнением (5.17), *момент силы* $\mathbf{F}$ *относительно оси* a определяется следующим образом: надо образовать момент относительно какой-либо точки O, лежащей на оси a, и спроектировать вектор этого момента на ось a. Можно также, в соответствии с уравнениями (5.17а, б), спроектировать площадь, соответствующую моменту относительно точки O, на плоскость, перпендикулярную оси a. Третий способ состоит в следующем: мы определяем кратчайшее расстояние точки приложения силы от оси a, которое называем плечом силы l, и разлагаем силу $\mathbf{F}$ на три слагающие: $\mathbf{F}_a$ параллельно оси a, $\mathbf{F}_l$ в направлении l и $\mathbf{F_n}$ в направлении, перпендикулярном к a и l. Тогда

$$M_a(\mathbf{F}) = M_a(\mathbf{F}_a) + M_a(\mathbf{F}_l) + M_a(\mathbf{F}_n). \tag{5.18}$$

Два первых члена справа равны нулю: *сила, параллельная оси a, и сила, пересекающая эту ось, не дают момента относительно оси a.*

Таким образом, в уравнении (5.18) остается только третий член, происходящий от силы, перпендикулярной оси a, плечо которой равно l. Таким образом, уравнение (5.18) сводится к

$$M_a(\mathbf{F}) = M_a(\mathbf{F}_n) = F_n l. \tag{5.18а}$$

Здесь уместно сказать несколько слов относительно различных обозначений произведений двух векторов. Помещаемая ниже таблица показывает, что по историческим и национальным обстоятельствам эти обозначения, к сожалению, очень различны[1].

[1] В русской литературе приняты обозначения, соответствующие первому столбцу таблицы; иногда употребляются также обозначения Гиббса. (*Прим. ред.*)

Наименование	в данной книге	Гиббс	Хивисайд	Итальянцы	Грассман
Скалярное или внутреннее произведение...	$(\mathbf{AB})$	$\mathbf{AB}$	$\mathbf{AB}$	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$\mathbf{A}\vert\mathbf{B}$
Векторное или внешнее произведение...	$[\mathbf{AB}]$	$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$	$\bigvee \mathbf{AB}$	$\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}$	$\mathbf{AB}$ или $\vert\mathbf{AB}$

Для пояснения. Великий термодинамик Виллард Гиббс составил для своих студентов краткий очерк векторного анализа, в то время еще мало известного. Обозначения, введенные в этом очерке, применяются большинством американцев и англичан. Введенное Хивисайдом обозначение векторного произведения, в котором $\bigvee$ означает начальную букву слова «вектор», было после этого вообще оставлено. Итальянская схема обозначений ведет свое начало от Марколонго. Герман Грассман установил в своем «Учении о притяжении» (1844 г. и 1862 г.) последовательную систему исчисления отрезков и точек. Простейшим сочетанием двух отрезков a и b он считает «площадь», т. е. построенный на a и b параллелограмм; поэтому он обозначает его через ab (иногда также через $[ab]$). Вертикальная черта означает у Грассмана «дополнение», т. е. переход к вектору, перпендикулярному к площади параллелограмма.

§ 6. ДИНАМИКА (КИНЕТИКА) СВОБОДНО ДВИЖУЩЕЙСЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ. ЗАДАЧА КЕПЛЕРА

Приводимый ниже простейший пример — движение планет — является в то же время и важнейшим для нашего мировоззрения. Это — плоская задача, так как движение происходит в плоскости эклиптики, если планетой является Земля. Мы считаем Солнце неподвижным и обосновываем это допущение ссылкой на подавляющую массу Солнца:

$$\text{Солнце } 330\,000, \quad \text{Юпитер } 320, \quad \text{Земля } 1, \quad \text{Луна } \frac{1}{81}.$$

Движение самого Солнца будет рассмотрено в конце этого параграфа. Обозначим массу Солнца через M, массу планеты через m. Ньютонова сила притяжения равна:

$$|\mathbf{F}| = G\frac{mM}{r^2}, \quad (G \text{ – постоянная тяготения})$$

или в векторной форме:

$$\mathbf{F} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\mathbf{r}}{r}. \tag{6.1}$$

Направление этой силы проходит через неподвижную точку O — центр Солнца, из которого проводится радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Поэтому $[\mathbf{rF}] = 0$, и, следовательно, согласно второй аксиоме,

$$\left[\mathbf{r}\dot{\mathbf{G}}\right] = 0 \quad \text{и ввиду (5.14)} \quad [\mathbf{rG}] = \text{const}.$$

Момент импульса относительно Солнца постоянен, и, следовательно, согласно уравнению (5.15), постоянна также секториальная скорость. В этом состоит в т о р о й з а к о н К е п л е р а:

«Радиус-вектор, проведенный от Солнца к планете, описывает в равные времена равные площади».

Удвоенную постоянную секториальную скорость мы называем постоянной площадей C:

$$2\frac{dS}{dt} = C. \tag{6.2}$$

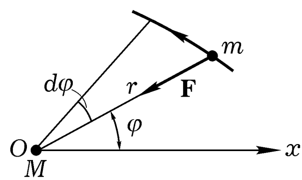

Рис. 6. Полярные координаты в задаче Кеплера; площадь, описанная радиусом-вектором; в начале координат находится Солнце

Введем (рис. 6) полярный угол φ — центральную или истинную аномалию, по терминологии астрономов. Имеем:

$$dS = \frac{1}{2}r^2 d\varphi, \quad \frac{dS}{dt} = r^2\dot{\varphi} = C,$$

и, следовательно,

$$\dot{\varphi} = \frac{C}{r^2}. \tag{6.3}$$

Чтобы прийти к *первому* закону Кеплера, а именно к уравнению траектории, перейдем к координатной форме записи. Уравнения движения после сокращения на m примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\dot{x}}{dt} &= -\frac{GM}{r^2}\cos\varphi, \\ \frac{d\dot{y}}{dt} &= -\frac{GM}{r^2}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6.4}$$

Умножая на $\dfrac{1}{\dot{\varphi}}$ и приняв во внимание (6.3), получим:

$$\frac{d\dot{x}}{d\varphi} = -\frac{GM}{C}\cos\varphi,$$

$$\frac{d\dot{y}}{d\varphi} = -\frac{GM}{C}\sin\varphi.$$

Эти уравнения можно проинтегрировать, что дает

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= -\frac{GM}{C}\sin\varphi + A, \\ \dot{y} &= \frac{GM}{C}\cos\varphi + B, \end{aligned}\right\} \tag{6.5}$$

где A и B — постоянные интегрирования. Словами это означает: *годограф движения планеты есть окружность*:

$$(\dot{x} - A)^2 + (\dot{y} - B)^2 = \left(\frac{GM}{C}\right)^2. \tag{6.5a}$$

К этому годографу мы вернемся в задаче I.11. Теперь преобразуем левые части уравнения (6.5) к полярным координатам. Так как

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi,$$

то

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi = -\frac{GM}{C}\sin\varphi + A,$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi + r\dot{\varphi}\cos\varphi = \frac{GM}{C}\cos\varphi + B.$$

Исключим $\dot{r}$ путем умножения первого уравнения на $-\sin\varphi$, второго — на $\cos\varphi$ и последующего их сложения. Сначала получаем:

$$r\dot{\varphi} = \frac{GM}{C} - A\sin\varphi + B\cos\varphi$$

или, приняв во внимание (6.3),

$$\frac{1}{r} = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C}\sin\varphi + \frac{B}{C}\cos\varphi. \tag{6.6}$$

Это уравнение конического сечения в полярной системе координат, полюс которой совпадает с фокусом конического сечения. Таким образом, мы пришли к первому закону Кеплера:

«Планета описывает эллипс, в одном из фокусов которого находится Солнце».

Отметим при этом, что другие возможные типы траекторий — гипербола и парабола — относятся, очевидно, только к кометам, а не к планетам; поэтому мы можем их здесь не рассматривать (ср., однако, задачу I. 12).

Приведенный здесь вывод первого закона Кеплера отличается от вывода, обычно приводимого в учебниках и основывающегося на законе сохранения энергии. Чтобы вывести этот закон для нашего случая, вернемся к уравнению (6.4), заменив в нем справа $\cos\varphi$ на $\frac{x}{r}$ и $\sin\varphi$ на $\frac{y}{r}$. Умножаем первое из уравнений (6.4) на $\dot{x}$, второе на $\dot{y}$ и складываем. Получаем:

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\frac{1}{2}\frac{GM}{r^3}\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -\frac{GM}{r^2}\frac{dr}{dt}.$$

Интегрирование по t дает:

$$\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{GM}{r} + W. \tag{6.7}$$

Слева стоит кинетическая энергия, деленная на m, а первый член справа с точностью до знака равен потенциальной энергии, деленной на m. Поэтому W означает постоянную энергии, также деленную на m. Наше уравнение (6.7) имеет ту же форму, что и закон сохранения энергии при одномерном движении [уравнение (3.8)].

Чтобы как можно проще получить из уравнения (6.7) уравнение траектории (6.6), вспомним, что квадрат элемента длины в полярных координатах выражается следующим образом:

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\varphi^2.$$

Следовательно,

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left\{\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + r^2\right\}.$$

На основании (6.3) это выражение можно записать так:

$$C^2 \left\{\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right\}$$

или, полагая $s = \frac{1}{r}$,

$$C^2 \left\{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 + s^2\right\}.$$

Теперь закон сохранения энергии (6.7) принимает вид:

$$\frac{1}{2}C^2 \left\{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 + s^2\right\} - GMs = W.$$

Дифференцируя это равенство по φ, получаем:

$$\frac{ds}{d\varphi}\left\{C^2\left(\frac{d^2 s}{d\varphi^2} + s\right) - GM\right\} = 0.$$

Так как $\frac{ds}{d\varphi} \neq 0$[1], то выражение в скобках должно обращаться в нуль. Это дает для s линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами:

$$\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s = \frac{GM}{C^2}.$$

Общий интеграл такого уравнения равен сумме какого-либо частного интеграла неоднородного уравнения и общего интеграла однородного

---

[1]Операция дифференцирования повышает порядок дифференциального уравнения. В соответствии с этим, число произвольных постоянных в общем решении уравнения увеличивается на единицу. Значит, такая операция приводит к появлению новых решений. В рассматриваемом здесь случае дифференциальное уравнение, полученное после дифференцирования уравнения

$$\frac{1}{2}C^2\left\{\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 + s^2\right\} - GMs = W, \tag{а}$$

распадается на два уравнения:

$$\frac{ds}{d\varphi} = 0; \tag{б}$$

$$C^2\left(\frac{d^2s}{d\varphi^2} + s\right) - GM = 0. \tag{в}$$

Общее решение уравнения (б) есть $s = C'$, где C' — произвольная постоянная. Оно соответствовало бы круговому движению. Однако оно является лишним, так как исходное уравнение (а) имеет решение такого вида лишь при вполне определенном значении C' и притом при вполне определенном соотношении между W и C. В самом деле, в случае круговой траектории $\frac{ds}{d\varphi}$ обращается в нуль в каждой точке траектории. В общем же случае, как показывает уравнение (а), $\frac{ds}{d\varphi} = 0$ лишь в двух точках, а именно

$$s = \frac{GM \pm \sqrt{G^2M^2 + 2WC}}{C^2}.$$

Чтобы траектория была круговой, необходимо, чтобы оба корня s были равны между собой. Это дает

$$s = \frac{GM}{C^2}.$$

Но это выражение является частным решением уравнения (в). Следовательно, отбрасывая уравнение (в), мы не теряем никаких решений уравнения (а). (*Прим. ред.*)

уравнения. Один из частных интегралов неоднородного уравнения равен, очевидно,

$$r = \mathrm{const} = \frac{GM}{C^2}.$$

Общий интеграл однородного уравнения является линейной комбинацией $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$. Поэтому можем написать:

$$s = \frac{GM}{C^2} - \frac{A}{C}\sin\varphi + \frac{B}{C}\cos\varphi,$$

где $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ — постоянные интегрирования. Но это как раз и есть наше прежнее уравнение (6.6).

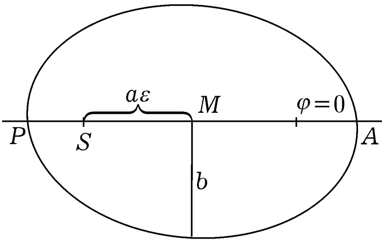

Рис. 7. Кеплеров эллипс с большой и малой осями; перигелий, афелий, численный эксцентриситет

Теперь запишем это уравнение для того специального случая, когда луч $\varphi = 0$, исходящий из одного фокуса, проходит также через другой фокус, или, иначе выражаясь, он вместе с лучом $\varphi = \pi$ образует главную ось эллипса (рис. 7). На этой оси лежат точки P — «перигелий» (вблизи Солнца) и A — «афелий» (вдали от Солнца), в которых радиус-вектор r должен быть минимальным и, соответственно, максимальным. Отсюда вытекает условие: $\frac{dr}{d\varphi} = 0$ при $\varphi = \begin{cases} 0 \\ \pi \end{cases}$.

Из него на основании (6.6) вытекает требование $A = 0$.

Из рис. 7, кроме того, следует, что в перигелии

$$r = SP = a(1-\varepsilon), \quad \varphi = \pi$$

и в афелии

$$r = SP = a(1+\varepsilon), \quad \varphi = 0,$$

где через ε обозначен численный эксцентриситет. Таким образом, согласно уравнению (6.6), в перигелии

$$\frac{1}{a(1-\varepsilon)} = \frac{GM}{C^2} - \frac{B}{C},$$

в афелии

$$\frac{1}{a(1+\varepsilon)} = \frac{GM}{C^2} + \frac{B}{C}.$$

Отсюда получим путем сложения и вычитания:

$$\frac{GM}{C^2} = \frac{1}{a(1-\varepsilon^2)}, \quad \frac{B}{C} = -\frac{\varepsilon}{a(1-\varepsilon^2)}. \tag{6.8}$$

Выразим еще постоянную площадей C через период обращения T. Из (6.2) непосредственно получаем

$$C = \frac{2S}{T}, \quad \text{где } S = \pi ab = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}.$$

S — полная площадь, описываемая радиусом-вектором за период обращения. Следовательно,

$$C^2 = \frac{4\pi^2 a^4(1-\varepsilon^2)}{T^2}. \tag{6.9}$$

Если мы подставим это выражение в первое из уравнений (6.8), то получим:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}.$$

Так как G и M одинаковы для траекторий всех планет, то уравнение (6.10) выражает третий закон Кеплера:

«Квадраты времен обращений планет относятся как кубы больших осей».

Кеплер приветствовал[1] открытие этого закона следующими полными энтузиазма словами: «Наконец-то я выявил и, сверх моих надежд и ожиданий, нашел истинным, что вся природа гармонии в полном своем объеме и во всех своих деталях существует в небесных движениях, правда, не таким образом, как я раньше предполагал, а совсем другим, вполне совершенным образом».

Однако третий закон Кеплера в форме (6.10) еще не вполне точен. Он справедлив лишь постольку, поскольку можно пренебречь массой планеты m по сравнению с массой Солнца M. Теперь мы откажемся от этого пренебрежения и обратимся к собственно астрономической проблеме двух тел, которая лишь незначительно труднее, чем рассматривавшаяся нами до сих пор проблема одного тела.

---

[1]«Harmonia mundi», 1619 г. Первые два закона Кеплера были опубликованы в 1609 г. в «Astronomia nova».

Учет движения Солнца

Пусть x_1, y_1 — координаты Солнца, а x_2, y_2 — координаты планеты.

Так как по третьему закону Ньютона сила, приложенная в точке S, противоположна силе, приложенной в точке P, то полная система уравнений движения будет иметь вид:

для Солнца | для планеты

$$M\frac{d^2x_1}{dt^2} = \frac{mMG}{r^2}\cos\varphi; \qquad m\frac{d^2x_2}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^2}\cos\varphi;$$

$$M\frac{d^2y_1}{dt^2} = \frac{mMG}{r^2}\sin\varphi; \qquad m\frac{d^2y_2}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^2}\sin\varphi.$$

Введем относительные координаты

$$x_2 - x_1 = x, \quad y_2 - y_1 = y; \tag{6.11а}$$

далее введем координаты центра тяжести

$$\frac{mx_2 + Mx_1}{m+M} = \xi, \quad \frac{my_2 + My_1}{m+M} = \eta. \tag{6.11б}$$

Тогда вычитание соответственных уравнений движения дает:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{(M+m)G}{r^2}\cos\varphi, \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{(M+m)G}{r^2}\sin\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{6.12}$$

С другой стороны, сложение их дает:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0. \tag{6.13}$$

Сравнение уравнений (6.12) с прежними уравнениями (6.4) непосредственно показывает, что оба первые закона Кеплера остаются без изменения, т. е. что они справедливы также и для относительного движения, тогда как третий закон принимает форму:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}. \tag{6.14}$$

Таким образом, отношение $\frac{T^2}{a^3}$ не является более универсальной константой, а имеет несколько различные значения для каждой планеты. Однако, ввиду относительно большой массы Солнца, эти различия крайне незначительны.

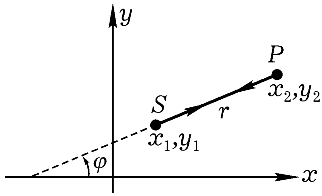

Рис. 8. Учет движения Солнца в задаче Кеплера

Далее, уравнения (6.13) показывают, что центр тяжести Солнца и планеты движется с постоянной скоростью. Если пользоваться системой отсчета, неподвижно связанной с этим центром тяжести, то эту скорость, равно как и координаты центра тяжести ξ, η, нужно положить равными нулю.

При этом уравнения (6.11б) упрощаются, и с помощью их и уравнений (6.11а) можно выразить через относительные координаты x, y координаты Солнца x_1, y_1 и координаты планеты x_2, y_2:

$$x_1,\, y_1 = -\frac{m}{M+m}(x,\, y),$$
$$x_2,\, y_2 = \frac{m}{M+m}(x,\, y).$$

Отсюда следует, что траектории Солнца и планеты в системе координат центра тяжести являются также эллипсами; при этом траектория планеты почти тождественна с рассматривавшейся до сих пор, тогда как траектория Солнца представляет собою эллипс, чрезвычайно малый по сравнению с эллипсом, по которому движется планета. Солнце движется по эллипсу таким образом, что оно всегда находится на стороне, противоположной месту нахождения планеты.

Если изменить закон тяготения, придав ему вид $F = kr^n$, где n произвольно, то хотя второй закон Кеплера и останется при этом в силе, но траектории станут трансцендентными и, вообще говоря, незамкнутыми кривыми. Только в случае $n = +1$, как и в случае тяготения $n = -2$, получаются эллипсы (см. задачу I. 13).