Глава VII
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ПРИНЦИПЫ МЕХАНИКИ

§ 38. ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА

Гаусс был не только «принцем математиков», но также, как астроном и геодезист, страстным вычислителем. В трех больших трудах он все больше совершенствовал свой «метод наименьших квадратов», и когда ему однажды пришлось (вопреки его желанию) читать лекцию в Геттингенском университете, он избрал в качестве темы наиболее любимый им «метод наименьших квадратов».

Свою короткую статью «О новом общем начале механики», написанную в 1829 г., он заключает следующей характерной фразой: «Весьма замечательно, что свободные движения, когда они при имеющихся условиях не могут осуществляться, видоизменяются природой как раз таким же образом, как это делает математик, выравнивающий по методу наименьших квадратов результаты наблюдений, относящиеся к величинам, связанным между собой необходимыми зависимостями».

Гаусс называет свой новый основной закон «принципом наименьшего принуждения». Меру принуждения он определяет как «сумму произведений отклонения каждой точки от своего свободного движения на ее массу». Если мы снова (ср. стр. 90) пронумеруем материальные точки и их прямоугольные координаты, то получим в качестве меры принуждения для системы из n материальных точек выражение

$$Z = \sum_{k=1}^{3n} m_k \left(\ddot{x}_k - \frac{X_k}{m_k}\right)^2. \tag{38.1}$$

«Свободное движение», которое имело бы место при отсутствии внутренних связей, определяется уравнением

$$\ddot{x}_k = \frac{X_k}{m_k}.$$

Таким образом, величина, стоящая в скобках в формуле (38.1), действительно является для k-й материальной точки «отклонением от свободного движения», вызванным принуждением. Эту величину можно было бы также называть «потерянной силой», деленной на массу (ср. стр. 83); таким образом, вместо определения (38.1) можно написать:

$$Z = \sum \frac{1}{m_k}(\text{потерянная сила})^2. \tag{38.2}$$

Таким образом, потерянные силы и обратные массы играют здесь такую же роль, как погрешности и статистические веса в теории ошибок.

Теперь мы должны определить, однако, что́ нужно понимать под термином «наименьшее принуждение». Для этого нужно указать, какие величины должны *сохраняться неизменными* и какие должны *варьироваться* при вычислении $\delta Z = 0$.

Должны *сохраняться неизменными*:

а) Состояние системы в каждый данный момент, т. е. положения и скорости всех материальных точек. Следовательно, мы должны положить:

$$\delta x_k = 0, \quad \delta \dot{x}_k = 0. \tag{38.3}$$

б) Условия связи, наложенные на систему. Если мы будем считать их голономными связями вида $F(x_1, x_2, \dots) = 0$, то при варьировании мы должны принять во внимание дополнительные условия

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\, \delta x_k = 0, \quad i = 1,\, 2,\, \dots\, ,\, r. \tag{38.4}$$

где r означает число условий связи, а, следовательно, $3n - r = f$ число степеней свободы системы. Продифференцируем равенства (38.4) дважды по t; при этом появляются члены с δx, $\delta \dot{x}$ и $\delta \ddot{x}$. В силу условий (38.3), нам надо из их числа выписать только члены с $\delta \ddot{x}$, т. е.

$$\sum_{k=1}^{3n} \frac{\partial F_i}{\partial x_k}\, \delta \ddot{x}_k = 0. \tag{38.4a}$$

в) Силы, действующие на систему, и, конечно, массы; таким образом, имеем:

$$\delta X_k = 0, \quad \delta m_k = 0. \tag{38.5}$$

Итак, *варьировать* нужно только $\ddot{x}_k$.

В соответствии с этим, учтя дополнительные условия (38.4а) по методу лагранжевых множителей, мы получим из формулы (38.1):

$$\delta Z = 2\sum_{k=1}^{3n}\left\{m_k\ddot{x}_k - X_k - \sum_{i=1}^{r}\lambda_i\frac{\partial F_i}{\partial x_k}\right\}\delta\ddot{x}_k = 0. \tag{38.6}$$

Из величин $\delta\ddot{x}$ только $f = 3n - r$ являются здесь независимыми друг от друга. Однако с помощью соответственного выбора множителей λ_i (как на стр. 91) можно обратить в нуль r из выражений в фигурных скобках, так что в сумме (38.6) останутся только f членов с $\delta\ddot{x}_k$, которые теперь могут рассматриваться как независимые. Поэтому должны обращаться в нуль также все остальные f выражений в фигурных скобках. Таким образом, мы получаем в точности *уравнения Лагранжа первого рода* в форме (12.9).

Очевидно, что это доказательство можно без изменения распространить также и на случай неголономных связей. Итак, мы действительно имеем дело с «новым общим началом механики», как гласит заглавие статьи Гаусса. Это начало механики равноценно принципу Даламбера и, подобно последнему, представляет собой дифференциальный принцип, потому что оно трактует о поведении системы только в настоящий (но не в будущий или прошедший) момент времени. В соответствии с этим, здесь нет необходимости применять правила вариационного исчисления, а можно обойтись правилами обычного дифференциального исчисления для определения максимумов и минимумов.

§ 39. ПРИНЦИП «ПРЯМЕЙШЕГО ПУТИ» ГЕРЦА

В настоящем параграфе, собственно говоря, речь будет идти лишь о частном случае принципа Гаусса. Однако причина, по которой Герц смог назвать свой принцип если и не новым, то во всяком случае общим, заключается в том, что ему удалось, как мы уже указывали на стр. 15, заменить силы связями между рассматриваемой системой и другими, находящимися с ней во взаимодействии системами. Таким образом, Герц мог ограничиваться рассмотрением *свободных систем.* Далее, для того, чтобы прийти к геометрическому толкованию, которое он имел в виду, Герц должен был рассматривать все массы как кратные некоторой, скажем, атомарной *единичной массе.* Поэтому множитель m_k в гауссовом выражении (38.1) становится равным единице, тогда как X_k становится равным нулю. При этом выражение (38.1) переходит в

$$Z = \sum_{k=1}^{N} \ddot{x}_k^2. \tag{39.1}$$

Здесь верхний предел N над знаком суммы означает, что число единичных масс, по которым (согласно предусмотренным связям и нумерации масс) нужно суммировать, возросло в степени, не поддающейся более точному определению.

Произведем в формуле (39.1) еще одно изменение, заменив

$$\ddot{x}_k \quad \text{на} \quad \frac{d^2 x_k}{ds^2}, \quad \text{где} \quad ds^2 = \sum_{k=1}^{N} dx_k^2. \tag{39.2}$$

Это допустимо потому, что закон сохранения энергии, который является следствием уравнений Лагранжа первого рода, а следовательно, и принципа Гаусса, в рассматриваемом частном случае гласит:

$$\frac{1}{2} \sum \left(\frac{dx_k}{dt}\right)^2 = W$$

или

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \text{const}.$$

Разделив равенство (39.1) на квадрат этой постоянной, получим из Z величину

$$K = \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{d^2 x_k}{ds^2}\right)^2. \tag{39.3}$$

Герц называет ds *элементом длины*, $\sqrt{K}$ — *кривизной* траектории, описываемой системой, и постулирует:

$$\delta K = 0. \tag{39.4}$$

«Всякая система пребывает в состоянии покоя или равномерного движения по *прямейшему пути*».

Этот способ выражения (ср. стр. 309 ранее цитированной книги Герца) весьма напоминает формулировку первой аксиомы Ньютона.

Математическое преобразование требования (39.4) повторяет гауссово (ср. выше) и на основании условий варьирования, установленных на стр. 280 в пп. а) и б), приводит, очевидно, к уравнениям Лагранжа первого рода (при $m_k = 1$) для свободного движения.

Однако возникает вопрос: чем оправдан выбор названий «элемент длины» для величины ds и «кривизна» для величины $\sqrt{K}$? Очевидно, что эти величины надо рассматривать как многомерные. Мы «находимся» при этом не в трехмерном, а в N-мерном евклидовом пространстве координат $x_1, x_2, \ldots, x_N$. В этом пространстве, как известно, элемент длины действительно определяется выражением (39.2). Выражение (39.3) для квадрата кривизны траектории в общем случае мы оправдываем, исходя из двух- и трехмерного случаев, следующим образом.

Согласно формуле (5.10), в пространстве координат x_1, x_2 имеет место

$$K = \frac{1}{\rho^2} = \left(\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta s}\right)^2. \tag{39.5}$$

Согласно рис. 4б, $\Delta\varepsilon$ есть угол между двумя соседними касательными к траектории, точки касания которых находятся на расстоянии Δs друг от друга. Эти касательные имеют направляющие косинусы, соответственно,

$$\frac{dx_1}{ds}, \quad \frac{dx_2}{ds} \quad \text{и} \quad \frac{dx_1}{ds} + \frac{d^2x_1}{ds^2}\Delta s, \quad \frac{dx_2}{ds} + \frac{d^2x_2}{ds^2}\Delta s. \tag{39.6}$$

Однако эти направляющие косинусы являются в то же время ординатами обеих точек пересечения единичной окружности с ее радиусами, проведенными параллельно обеим касательным; дуговая мера угла $\Delta\varepsilon$ является расстоянием между двумя названными точками пересечения. Таким образом, согласно (39.6), имеем:

$$\Delta\varepsilon = \left[\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2\right]\Delta s^2$$

и, согласно формуле (39.5),

$$K = \left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2. \tag{39.7}$$

В пространстве трех координат x_1, x_2, x_3 величина $\Delta\varepsilon$ снова определяется как угол между соседними касательными к трехмерной траектории. Вместо единичной окружности мы имеем здесь единичную сферу, через центр которой нужно провести параллели к обеим касательным. Расстояние между точками их пересечения с единичной сферой дает дуговую меру угла $\Delta\varepsilon$; следовательно,

$$\Delta\varepsilon^2 = \left[\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_2}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2x_3}{ds^2}\right)^2\right]\Delta s^2.$$

Отсюда, согласно формуле (39.5), получается трехчленное выражение для K.

Обобщение для пространства N измерений и для N-членной формулы (39.3) очевидно.

На этом мы заканчиваем наше изложение механики Герца. Как мы уже отмечали на стр. 15, механика Герца построена в высшей степени увлекательно и последовательно, но, в силу сложности замены сил связями, оказалась мало плодотворной.

§ 40. НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЯХ

Геодезические линии на произвольной кривой поверхности мы определим здесь как *траектории свободной* (а значит, движущейся также и без трения) *материальной точки, связанной с поверхностью.* Пусть масса точки будет равна единице, уравнение поверхности пусть будет $F(x, y, z) = 0$.

Согласно принципу Мопертюи, эти геодезические линии одновременно являются и *кратчайшими линиями* или, говоря в более общем смысле (ср. стр. 276), *линиями экстремальной длины.* В силу применимости закона сохранения энергии, скорость движения по траектории постоянна. Путем соответствующего выбора нормировки энергии можно скорость сделать равной единице и, в соответствии с этим, заменить $\frac{d}{dt}$ на $\frac{d}{ds}$.

Можно прийти к элементарному определению геодезических линий, если описывать траектории с помощью уравнений Лагранжа первого рода. В сокращенной векторной записи эти уравнения в нашем случае будут иметь следующий вид:

$$\dot{\mathbf{v}} = \lambda \operatorname{grad} F. \tag{40.1}$$

Вектор $\dot{\mathbf{v}}$ направлен по главной нормали, к нашей траектории, если, как в данном случае, $v = \text{const}$, т. е. $\dot{v} = 0$ (ср. в § 5 начало раздела 3); таким образом, $\dot{\mathbf{v}}$ лежит в соприкасающейся плоскости (ср. там же). С другой стороны, вектор $\operatorname{grad} F$ направлен по нормали к поверхности, так как для всех направлений поступательного движения dx, dy, dz на поверхности имеет место

$$\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0,$$

так что направление

$$\frac{\partial F}{\partial x} : \frac{\partial F}{\partial y} : \frac{\partial F}{\partial z}$$

действительно нормально к этим направлениям поступательного движения. Таким образом, формула (40.1) содержит элементарное определение геодезических линий: *их главная нормаль совпадает по направлению с нормалью к поверхности, или их соприкасающаяся плоскость проходит через нормаль к поверхности.*

Теперь воспользуемся принципом *прямейшего пути.* Согласно этому принципу, геодезическая линия имеет меньшую кривизну, чем соседние траектории; при этом, по условию (38.3), сравниваемые соседние траектории ограничены тем, что они должны проходить через ту же точку и с той же касательной, как и геодезическая линия в рассматриваемой точке. Совокупность этих соседних траекторий мы получим, если, кроме плоскости, проходящей через нормаль к поверхности и дающей в сечении с последней геодезическую линию, проведем через соответствующую касательную все возможные наклонные плоскости и определим линии их пересечения с поверхностью. Согласно принципу Герца, эти косые сечения имеют *бóльшую кривизну* (а следовательно, и *меньший радиус кривизны*), чем нормальные сечения.

Этому соответствует *теорема Менье теории поверхностей*, которая гласит: *радиус кривизны косого сечения равен проекции радиуса кривизны нормального сечения на плоскость косого сечения.* Таким образом, теорема Менье может рассматриваться как количественная «специализация» общего принципа прямейшего пути.

В заключение применим к нашим геодезическим траекториям *уравнения Лагранжа второго рода.* Тем самым мы вступаем в круг идей большого труда Гаусса, написанного им в 1827 г. («Disquisitiones generales circa superficies curvas»); в четырехмерном обобщении этот круг идей характерен для общей теории относительности.

Подобно тому, как Лагранж вводит произвольные криволинейные координаты q, Гаусс в качестве координат на поверхности пользуется двумя произвольными семействами кривых, двояко покрывающих эту поверхность. Обозначим их общепринятым образом:

$$u = \text{const}, \quad v = \text{const}. \tag{40.2}$$

В этих координатах Гаусс выражает элемент длины ds в следующей форме:

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G dv^2. \tag{40.3}$$

«Первые дифференциальные параметры» E, F G, рассматриваемые как функции от u и v, связаны с прямоугольными координатами x, y, z точек поверхности формулами:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}.$$

Квадрат элемента длины, деленный на $2\,dt^2$, выражает кинетическую энергию T нашей движущейся по поверхности материальной точки.

Таким образом, мы можем выразить уравнения Лагранжа второго рода в обозначениях Гаусса, образуя

$$p_u = \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = E\dot{u} + F\dot{v},$$

$$2\frac{\partial T}{\partial u} = \frac{\partial E}{\partial u}\dot{u}^2 + 2\frac{\partial F}{\partial u}\dot{u}\dot{v} + \frac{\partial G}{\partial v}\dot{v}^2.$$

Следовательно, по схеме уравнений Лагранжа (если мы еще заменим $\frac{d}{dt}$

на $\frac{d}{ds}$) дифференциальное уравнение геодезических линий для координаты u запишется в виде:

$$\frac{d}{ds}\left(E\frac{du}{ds}+F\frac{dv}{ds}\right)= \\ =\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial E}{\partial u}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\frac{\partial F}{\partial u}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\frac{\partial G}{\partial u}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2\right\}. \quad (40.4)$$

Нет необходимости выписывать соответствующее дифференциальное уравнение для координаты v, так как оно, в силу закона сохранения энергии (в нашем случае $\frac{ds}{dt}=1$), должно быть идентичным с уравнением (40.4).

В своей названной работе (в статье 18) Гаусс выводит уравнение (40.4) из принципа кратчайшего пути. Здесь нам хотелось лишь указать на то, что гауссов метод криволинейных координат на поверхности (40.2) совпадает с лагранжевым методом механики системы. Оба метода инвариантны по отношению к любому преобразованию координат и зависят только от «внутренних» свойств поверхностей или, соответственно, механических систем.